ОСНОВНА ЛОГИКА

Коста Дошен

Ова књига је учињена слободно доступном преданошћу издавача Арона Сворца. Београд, 2013
This book is made freely available by the good offices of the publisher Aaron Swartz. Belgrade, 2013

Предговор

Из ове књиге би требало да се учи логика у средњим школама. Лепо би било да када одслужи своје у школи не буде одмах продата као полован уџбеник. Писана је у нади да ће можда да привуче и неког старијег у кући. Она може да се чита и мимо школе.

Логика се почевши од друге половине XIX века, па током целог XX века, веома успешно развила као област математике. Из ове књиге треба да се научи нешто уводно и елементарно о том математичком предмету. Та математика ће међутим да буде изложена обазриво. Више ће бити речи о општим, у основи филозофским, претпоставкама те математике него о самој тој математици.

Те претпоставке се тичу језика, рационално сазданог језика, чија се рационалност огледа не само у потпуној правилности него и у једноставности, економичности. С тим је модерна логика у првој половини XX века преобразила поглед на свет савремених људи, савремену филозофију, као што су у исто доба савремени свет преобразили по духу сродни правци модерне уметности, сликарства, музике, архитектуре.

У књизи се не претпоставља никакво математичко знање. Претпоставља се да је читалац чуо за математику, и довољно би било то што је могао да чује у основној школи.

Језик којим је писана ова књига није сасвим математички. Предмет о којем се говори је веома формалан – он се практично састоји од формула – али о том предмету не мора да се говори на исти начин. У овој књизи учињен је покушај да излагање о њему буде што мање формално, чак ни онолико формално колико је најчешће математика формална (а математика је иначе мање формална од логике). У тексту преовлађује обичан српски, а не формуле и математички симболи.

Ни у обичном српском језику стил ове књиге није сасвим математички. У тежњи да буду што прецизнији и што концизнији математичари се често изражавају тако да их непосвећени не разумеју најбоље. (Помислио би човек да математичари то чине да засене простоту.) Ако се колико је могуће одустане од тог математичког стила жртвује се нешто и од прецизности и од концизности, али вреди платити ту цену да почетнику буде лакше. Да не буде преплашен.

Математику многи у школи не воле, и то је у великој мери због начина на који се предаје. Није истина да по својој природи толики људи нису склони математици. Ти исти што скоро поносно изјављују да су у школи били лоши из математике, и да је не цене, у свом слободном времену, на забавним странама илустрованих часописа, радо ће да се баве проблемима који су математички по духу.

Поједини делови књиге писани су за математички мало спретнијег и амбициознијег читаоца, и могу да се прескоче. (Ради се, као што је на одговарајућим местима напоменуто, о одељку 1.13, доказу тврђења о дуалности између конјункције и дисјункције у одељку 1.14, доказу функционалне потпуности у одељку 1.15 и доказу потпуности у одељку 1.19.) Још понегде може да се не улази у детаље а да то не утиче пресудно на разумевање текста у наставку. (Није неопходно знати све о свођењу на дисјунктивну и конјунктивну нормалну форму у одељку 1.16 – свођење на конјунктивну нормалну форму може и да се прескочи – ни баш све детаље дефиниције истинитости у моделу у одељку 2.7.) Ти мало тежи, необавезни, делови књиге треба да послуже онима који су се заинтересовали и желе да науче више.

Математика се обично учи радећи задатке, али ова књига није сасвим математичка, и задаци на крају нису обавезно штиво. Није обавезно да се ураде да би се разумео текст књиге – поготову није обавезно да се ураде сви. Наставник који буде предавао по овој књизи могао би да их допуни мање-више сличним, лакшим или тежим, задацима, који су примерени његовим ђацима.

Неки делови логике, који би требало да буду посебно занимљиви филозофима, неки пут се називају филозофском логиком, али они не чине посебан предмет. Филозофској логици су основе, којима ћемо се бавити у овој књизи, исте као логици у математици. За филозофију изванредно интересантни, а можда и најинтересантнији, логички резултати, до којих је дошао Гедел (о њима ће бити речи при крају књиге у одељцима 2.13 и 2.14), сасвим су у области математике.

Логика је данас једна од најпримењенијих области математике. Она је један од главних стубова, ако не главни стуб, теоријског рачунарства. Зато у информатичком добу у којем живимо треба знати нешто о логици. Она међутим није важна само због тога. Она је важна уопште за дисциплину ума и језика, за прецизно и утемељено размишљање и изражавање, који се испољавају у највишој мери у математици и науци, али се тичу свих области разума и одувек инспиришу филозофију.

Захвалан сам Милошу Аџићу, Мирјани Борисављевић, Слободану Вујошевићу, Обраду Касуму и Зорану Петрићу што су се потрудили да прочитају ову књигу и да ми помогну својим напоменама.

У Београду, јуна 2013.

САДРЖАЈ

0. УВОД

0.1. Област логике

Логика није само реч из језика учених људи, него се користи и у обичном животу. „Ту нема логике“ се каже за нешто неочекивано, неправилно, неразумно, а „по тој логици испадне да ...“ најављује да се до тога што следи дошло на неки посебан, можда погрешан, начин. И у једном и у другом случају ради се о нечем у вези са размишљањем, памећу и закључивањем. Такве и сличне, доста неодређене, употребе речи *логика* у вези су са одређеним предметом којим ћемо се овде бавити. Тај предмет потиче из филозофије и још увек јој је доста близак. Близак је и граматици, са којом га повезује истраживање језика. Ради се међутим о математичком предмету.

Основна логика, језгро логике, је математика у вези са речима *и*, *или*, *ако*, *не*, *сви*, *неки* и *је*. Речи *и*, *или*, *ако* и *не* зову се *везници*, и њима се бави *исказна логика*, а везницима заједно са речима *сви* и *неки*, које се зову *квантификатори*, и речју *је* када се она односи на једнакост, бави се *предикатска логика*.

Те се речи користе много у језику читаве математике, као и у обичном језику, али овде се не ради о томе, него о посебној области математике где су структуре у вези са тим речима предмет изучавања. Осим тога, у логици срећемо и другу математику, мање или више удаљену од тог језгра, која се неки пут прелива у друге математичке области, као што су алгебра, комбинаторика или теоријско рачунарство. Посебно је блиска логици теорија скупова, која може да се сматра не посебном облашћу него делом логике. То је једна велика математичка теорија у вези са речју *је* када се она односи на припадност. На рубу логике се осим тих других математичких области налазе и неке области филозофије, лингвистике и психологије – нарочито филозофије. (О утицају логике на те области људског знања биће речи у последњем одељку 2.15.)

Логика је данас једна од најпримењенијих математичких дисциплина, захваљујући својим везама са рачунарством. Ту се њен утицај испољава кроз анализу израчунљивости, али још више у прављењу програмских језика. Логика се међутим није развила мотивисана тим применама.

То је иначе случај у математици, где се велике теорије не развијају због примена ван математике. Примењена математика је незнатан и споредан део огромне творевине, која углавном није мотивисана применама и засада их нема. Пример једне такве велике математичке теорије је теорија група. Њу је, бавећи се апстрактно питањем решивости једначина, засновао у првој половини XIX века Галоа

(Évariste Galois), један двадесетогодишњи математичар. (Математика је за младе људе.) После њега се читав један век теорија група развијала због разлога који нису ван математике. Тај развој је дао многобројне и значајне резултате, при чему се њихов значај мери математичким критеријумима, који су често, ако не пре свега, естетски. Резултат се ту цени зато што је леп. Тек се у XX веку испоставило да теорија група може изванредно да се примени ван математике у физици. На њој се, између осталог, заснива физика елементарних честица. Када је теорија група пре тога развијана није се уопште очекивало да ће нам она објаснити природне законе и од чега је свет саздан.

Математичаре, као и филозофе, води жеља да боље разумеју, а као што рекосмо и лепота њиховог предмета. Да је то што раде и корисно је као додатна награда, која није била главни циљ. Тако веома корисно – најкорисније – испадне оно где корист уопште није тражена.

То би био случај и у логици. Логика која је постајала веома примењена како се XX век ближио крају није била претходно развијана због тих примена, или, ако су те примене и узимане у обзир, оне нису биле главни циљ. У логици је тражена савршена прецизност, у изражавању, а преко тога и у размишљању. То што је у том подухвату достигнуто је мерено математичким критеријумима изванредно лепо. Сем тога, захваљујући савременој логици пуно се тога боље разуме и у математици и у филозофији.

Предмет ове књиге назива се неки пут *формалном логиком*, и то обично када се има у виду и некаква друга логика. Остављајући на страну неприличне употребе речи *логика* у неким филозофијама и идеологијама (в. одељак 2.15), има још употреба те речи које се углавном не тичу много оног чиме ћемо се овде бавити. У *логици научног открића* ради се о филозофији науке, а у *неформалној логици*, која се још зове теоријом аргументације, о реторици, вештини убеђивања. (Бављење логичким грешкама и грешкама у аргументацији спада исто пре у реторику, а може да се тиче и психологије; в. одељак 2.15.)

0.2. Логика до XIX века

Име су логици дали Грци. Реч *логика* потиче од грчког λόγος, што се преводи као *реч* (црквенословенски слóво), а значи пуно тога у вези са језиком, мишљу, разумом, науком. За хришћане то је једно од Божијих имена.

Логика је сматрана облашћу филозофије веома дуго, почевши од старогрчког филозофа Аристотела, чија су логичка учења, изложена у збирци која се зове *Органон* (у преводу *Оруђе*), доминирала све до друге половине XIX века. Тада ће логика прећи из филозофије у математику. Слично је било са физиком, која се од философије одвојила у XVII веку, када се приклонила математици и тако постала наука.

Код Аристотела налазимо један веома мали фрагмент предикатске логике, где међутим везници нису јасно одвојени од квантификатора. У старом веку, у Грчкој, поред Аристотелове школе, има филозофа из мегарске и стоичке школе који су се бавили исказном логиком. Филон из Мегаре открио је везник *материјалне импликације*, и то је са тачке гледишта савремене логике значајније откриће него било које од Аристотелових. *Импликација* је име везника *ако*, уз који обично иде и реч *онда*. (То *онда*, које може и да се изостави, није у списку на почетку прошлог одељка 0.1, да се не помисли да *ако* и *онда* иду засебно.) Када су p и q реченице, материјалну импликацију имамо у реченицама облика „Ако p, онда q“ које се своде на реченице облика „Или не p или q“. (Материјалном импликацијом бавићемо се посебно у одељку 1.5.)

Грци су математику схватали пре свега као геометрију, а у Еуклидовим *Елементима*, главној математичкој књизи старог века, то геометријско градиво је изложено дедуктивно, као *аксиоматски систем*. Полази се од неких основних претпоставки, које називамо *аксиоме*, и из њих се све дедукује, изводи. Пошто је тада логика замишљана као теорија дедукције, оправдано би било очекивати да ће та теорија да буде примењена у *Елементима*. Те примене међутим нема. Изгледа да грчке математичаре нису много занимала учења тадашњих логичара, а нису се ни сами посветили изучавању дедукције. Дедукцијом су се служили, али је нису изучавали, ни иначе ни као математички предмет. Мада је геометрија у *Елементима* изложена дедуктивно, то излагање није најстрожије. Одговарајући, много већи, ниво строгости и прецизности биће достигнут тек у XX веку.

Постојала је давно једна индијска логичка традиција, и у мањој мери још и кинеска. Оне међутим немају неке видљиве везе са грчком, и са савременом, логиком.

Логика заснована на Аристотеловој изучавана је пуно на западноевропским универзитетима у средњем веку. Тамо се она учила заједно са граматиком и реториком у првом делу студија, који се звао *trivium* (из те речи је изведен придев *тривијалан*, што значи једноставан, прост). После се учио *quadrivium*, који чине аритметика, геометрија, музика и астрономија, што је све у сфери математике, и најзад филозофија и теологија, ако не медицина или право. У то доба се логика везивала за теологију скоро исто колико и за филозофију. Када су прочитани са тачке гледишта савремене логике нађено је да у средњовековним логичким текстовима има занимљивих доприноса.

Са растом модерне науке и математике у XVII веку та схоластичка логика је изгубила углед, а термин *схоластички*, који би требало да значи нешто као *школски* или *учен*, постао је погрдан. Водећи умови – филозофи, као и научници и математичари – стали су да гледају на логику као на некорисну и педантску науку, и били су у праву. Када је прошао средњи век није било значајног напретка у тој старинској логици, а и то што је она пружила пре свога гашења није било толико вредно. Занимљиво је међутим за социологију науке да је та неплодна и убога логика остала ушанчена у настави филозофије на универзитетима и још више у средњим школама, где је успон савремене логике у последња два века није сасвим елиминисао све до наших дана.

У неуким и заосталим срединама њено преживљавање је правдано обманом да постоје два засебна предмета: с једне стране математичка логика којом треба да се баве математичари за потребе математике, а с друге стране једна друга логика интересантна за филозофију којом се баве филозофи. Назив *математичка логика* је међутим у XX веку обухватио читаву логику, јер друге живе, вредне и корисне логичке науке нема. Један део математичке логике, који би требало да буде посебно занимљив филозофима, неки пут се назива *филозофском логиком*, али то није засебан предмет, и њему су основе, којима ћемо се бавити у овој књизи, исте као осталој математичкој логици. Назив за логику са придевом *математичка*, који је коришћен у доба успона савремена логике, да се она не би побркала са схоластичком логиком, временом ће се потпуно изгубити, и говориће се само *логика*.

У доба тог успона коришћен је и назив *симболичка логика*, као синоним за математичку логику. Тај назив није био лош, јер је подвлачио везу логике са језиком, везу која логику у односу на све друге области математике и филозофије ставља у посебан положај.

Прелазак логике у математику наговестио је у XVII веку и почетком XVIII века велики математичар и филозоф Лајбниц (Gottfried Wilhelm Leibniz), у списима који су међутим све до XX века остали необјављени и нису имали много утицаја на развој савремене логике. Оно што је код Лајбница најближе савременој логици је жеља да се природни језик замени једним савршено прецизним, математички систематичним и потпуно разумним новим језиком. У таквом језику не би при утврђивању исправности оног што је речено могло да буде спора око тумачења, као што бива са недоследностима природног језика. Место да се споре, саговорници би као у математици просто *израчунали* ко је у праву. Лајбниц, који је измислио и једну машину за рачунање и бавио се бинарним системом за бројеве, где се као код данашњих рачунара све пише само са 0 и 1, у великој је мери пророк информатичког доба.

0.3. Савремена логика

Ако пре средине XIX века имамо *праисторију* логике, доба од средине XIX века до Првог светског рата могло би да се назове *античким добом* логике. На почетку тог античког доба, када је логика прешла у математику, имамо Фрегеа (Gottlob Frege), и пре њега Була (George Boole). Бул је замислио исказну логику као неку нову алгебру, где се операције које одговарају речима *и* и *или* понашају донекле као множење и сабирање. Код Фрегеа међутим наилазимо на данас стандардно поимање логичког језика, који је мање алгебарски. Логичке речи предикатске логике наведене на почетку одељка 0.1, које укључују и оне из исказне логике, све имамо код Фрегеа, и оне се код њега први пут јасно и разговетно појављују, схваћене онако како их данас схватамо. Фреге је први препознао логичку форму језика како је ми данас видимо. (Користио је међутим неуобичајену дрвенасту нотацију, сличну оној из одељка 1.9.) Тај његов велики допринос савременој логици, који се у следећем веку показао тако плодним, није међутим одмах признат. Тек у другој половини XX века, пошто су Фрегеова открића поново откривена и у првој половини тог века спојена са неким другима, почетак нове ере у логици и крај ере *Органона* почео је да се обележава спомињањем Фрегеа.

Један од главних подухвата које је савремена логика предузела, због којег су је једно време звали *симболичком*, јесте прављење нових, вештачких језика, са симболима као што су математички симболи. Ти језици су много једноставнији, много правилнији и много прецизнији од природног језика, као што је српски (таквим вештачким језицима ћемо се бавити у одељцима 1.7 и 2.5). Изрази *природни* језик и *обичан* језик биће у овом тексту скоро синонимни. Разлика је у нијанси. Под обичним језиком неки пут подразумевамо нешто уже. У природном језику налазимо и обичан језик и мање обичан, прецизнији, математички језик. Вештачки језици логике, о којима је, као што смо рекли у прошлом одељку 0.2, размишљао Лајбниц, и који се први пут појављују у другој половини XIX века, код Фрегеа па после и код других, прецизнији су од математичке верзије природног језика, тј. допуњеног природног језика прилагођеног математици.

Вештачки језици логике требало би да буду једноставно *бољи* за циљеве које је она себи поставила. Те циљеве она дели са целом математиком, и могли бисмо да узмемо да су то *рачунање* и *разумевање*, с тим што је, у складу са оним што смо рекли у одељку 0.1, разумевање важније. Рачунање је у логици схваћено шире него обично. То није само рачунање са бројевима, него и са другим математичким и не-математичким објектима и структурама, и ту спада и закључивање, дедукција. Успеси у рачунању и разумевању треба да воде ширењу знања.

Добар језик у математици може да води великим успесима, а лош може да их онемогући. Што се тиче рачунања, успешност наших поступака за сабирање, множење и дељење, заснована је на добром језику, доброј нотацији, за бројеве. Знатно се лакше рачуна с нашом нотацијом (позиционом децималном нотацијом, која има и нулу) него с римском или грчком. (Још се лакше рачуна са бинарним системом за бројеве, који смо споменули на крају прошлог одељка 0.2.)

Савремена логика сматра да је добар језик значајан за рачунање и разумевање, и ширење знања, не само у математици него уопште. Осим тога, нови, вештачки, бољи, језици савремене логике биће потпуно прецизни, онако како никада раније, ни ван математике ни у њој, ниједан језик није био. Нова је та прецизност, а ново је такође, и са филозофске и са математичке тачке гледишта, то придавање толике важности језику. (Још нешто о статусу вештачких језика у данашњој логици биће речено при крају одељка 1.8.)

Развој савремене логике не може да се одвоји од изучавања *основа математике* и *теорије скупова*, која почиње у другој половини XIX века са Кантором (Georg Cantor). Фрегеов рад у логици је исто био везан за његова схватања о основама математике, за његов *логицизам*, како се назива његово учење да се аритметика, тј. теорија природних бројева (то су бројеви 0, 1, 2, 3,...), своди на логику. У Раселовом (Bertrand Russell), нешто каснијем, логицизму цела математика је требало да се сведе на логику.

Доба између два светска рата је почетак *класичног доба* логике (које је негде у другој половини XX века прешло у један други стил, који би био *барок*). У то доба су настале главне гране логике: *теорија модела*, *теорија доказа* и *теорија израчунљивости*. И теорија скупова, која може да се сматра четвртом облашћу логике, добила је свој савремени облик аксиоматског система у то доба.

Двадесетих година XX века логика је захваљујући Хилберту (David Hilbert) и Бернајсу (Paul Bernays) добила изглед који има и данас. Они су припремили терен за Гедела (Kurt Gödel), који ће доказати *потпуност* аксиоматског система за предикатску логику (в. одељак 2.11). Бернајс је претходно добио одговарајући лакши резултат за исказну логику (тај Бернајсов доказ биће скициран у одељку 1.19). Ти резултати, којима је заснована теорија модела, су узор за многе логичке резултате. (Шта значи *модел* у логици видеће се у одељку 2.7.)

Теорија доказа потиче од Хилбертових гледишта о основама математике. Њен првобитни циљ је био да се докаже непротивречност аксиоматских система за математику. Гедел је у својим резултатима о *непотпуности*, са којима се највише прославио, доказао да ти системи не могу да буду потпуни ако обухватају аритметику (в. одељак 2.13). Осим тога доказао је да се непротивречност тих система не може доказати унутар њих самих. У складу са тим, Хилбертов и Бернајсов ђак Генцен (Gerhard Gentzen) да би доказао непротивречност аксиоматског система за аритметику позвао се на нешто што се тиче бесконачности чега нема у том систему, али је сасвим уверљиво.

Тај први велики резултат хилбертовске теорије доказа није међутим Генценов највећи допринос. Он је засновао теорију доказа која би могла да се назове *теоријом дедукција*, где су математичке структуре које чине дедукције и правила дедукције предмет изучавања. (Нешто о тој теорији биће речено у следећем одељку 0.4 и касније у одељку 1.18.) Тај Генценов фундаментални допринос, као ни Фрегеов, није одмах признат, и још увек није довољно признат. (И Гедел и Генцен су дошли до својих најзначајнијих резултата пре него што су напунили 25 година. Логика је, као математика иначе, за младе људе.)

Двадесетих година XX века појавила се *интуиционистичка логика*, најзначајнија некласична логика, која је у складу са *конструктивистичком* филозофијом у основама математике. То је укратко филозофија која учи да је оно о чему говори математика творевина људског ума. Интуиционистичка логика, која се заснива на импликацији различитој од материјалне импликације класичне логике (коју смо поменули у прошлом одељку 0.2; о интуиционистичкој импликацији биће речи у одељку 1.18), посебно је занимљива за теорију доказа.

У складу са класичном логиком, којом ћемо ми да се бавимо, је *платонистичка* филозофија. Та филозофија, која води порекло од старогрчког филозофа Платона, учи да оно о чему говори математика не ствара човек. Тај математички свет, један апстрактни појмовни свет, човек затиче и труди се да опише. У математици имамо *открића*, а не *изуме*.

Тридесетих година XX века настала је теорија израчунљивости, чији је највећи успех прецизна математичка анализа појма израчунљиве аритметичке функције. Те функције, као што су нпр. функције везане за сабирање и множење, називају се још и *рекурзивним* функцијама. Та анализа се најчешће даје преко *Тјурингових машина*, апстрактних, неограничено великих, али релативно једноставних, рачунских машина. (Логичар чије име носе те машине је Alan Turing.) Разни други алтернативни приступи дефинишу међутим исте функције.

Теорија израчунљивости објашњава *одлучивост*, са којом се срећемо када за неко питање имамо поступак – математичари и информатичари кажу *алгоритам* – тако да, као машина, слепо следећи упутства тог поступка после коначно много корака морамо стићи до одговора. Одлучиво је нпр. питање да ли је неки број дељив са 3, а поступак може да буде дат преко сабирања цифара уобичајеног децималног записа. То сабирање понављамо све док не стигнемо до једноцифреног броја; одговор је *да* ако је тај број 3, 6 или 9, а иначе је *не*. Логичари се веома много баве проблемима одлучивости, а с тим у вези пре свега питањем да ли нешто може да се докаже у неком аксиоматском систему. Поред проблема потпуности, проблеми одлучивости су у протеклом веку били најтипичнији логички проблеми.

Као у математици уопште, у логици је истраживање у другој половини XX века све више и више расло. Крајем века логика се све више мешала са теоријским рачунарством, и тако је постала једна од најпримењенијих математичких дисциплина. Чудно је како је у то прерасла наука која је некада с правом проглашена за некорисну. Осим у рачунарству, велики је био утицај логике на теоријску лингвистику, која је тек у другој половини XX века донекле математизована. Током целог XX века логика је пуно утицала на филозофију оријентисану ка језику – веома значајан, ако не најзначајнији, део филозофије у том веку (в. одељак 2.15).

0.4. Формалне дедукције

За логику се у старом веку и касније говорило да је теорија дедукције, или, другим речима, извођења или закључивања. На то одређење логике наилази се и данас, иако не одговара, бар не сасвим, затеченом стању. Можда ће међутим једног дана да постане сасвим исправно. Зато курс основне логике може да се започне спомињањем дедукције, мада је то градиво (којим ћемо се мало бавити у одељку 1.18 и при крају одељка 2.12) за један виши курс.

У дедукцији се прелази са реченица које се зову *премисе*, или *претпоставке*, на реченицу која се зове *закључак*. Закључак се често, али не обавезно, најављује речима као што су *дакле*, или *према томе*, или *значи*. Ако су премисе тачне, онда и закључак мора бити тачан.

Из следеће две премисе:

(*a*) Јулијански календар сада касни тринаест дана иза грегоријанског,

(*p*) 25. децембар ове године по грегоријанском календару пада у среду

може дедукцијом да се дође до закључка

Дакле, 25. децембар ове године по јулијанском календару пада у уторак.

На почетку реда испред наше две премисе написали смо у заградама скраћенице *a* и *p* које користимо за њих. Када место премисе *p* стоји премиса

25. децембар ове године по јулијанском календару пада у среду,

из премисе *a* и те премисе може да се закључи

25. децембар ове године по грегоријанском календару пада у четвртак.

Дедукција се заснива на значењу речи у премисама и закључку, она следи правила везана за значење тих речи. У наша два примера дедукције се заснивају на значењу речи *јулијански календар*, *грегоријански календар*, *касни*, *тринаест дана*, *уторак*, *среда* и *четвртак*. Шта значи тачно 25. децембар није битно. Могао је да буде поменут било који други датум – не 25. децембар, него нпр. 14. јануар. Важно је само да је то одређени датум.

Задатак логике би по традиционалном схватању био опис правила која дедукције треба да следе. Онда је често стављано у традиционално одређење логике да је то теорија *исправних* дедукција, при чему би исправне биле оне дедукције које следе правила, и код којих, ваљда због тога, ако су премисе тачне (а не морају да буду тачне), онда ће и закључак да буде тачан. Али зар одвајање исправних дедукција од неисправних не тражи да се и једне и друге узму у обзир?

А да ли за логику уопште треба да постоје икакве друге дедукције осим исправних? Нешто што претендује да је дедукција али не следи правила не би ни требало звати дедукцијом, као што потези на шаховској табли који не следе правила те игре и нису шаховски потези. За шаховску теорију не мора да се каже да се бави *исправним* шаховским потезима. У реторици или психологији би можда могло да се говори о неисправним дедукцијама, али у логици за њих места нема.

Ево још једног примера дедукције. Из следеће две премисе:

(b) Ако неки датум по грегоријанском календару пада у среду, онда тај исти датум по јулијанском календару пада у уторак,

(p) 25. децембар ове године по грегоријанском календару пада у среду

може да се закључи исто што и малопре:

(q) 25. децембар ове године по јулијанском календару пада у уторак.

Ова дедукција зависи од значења речи *ако*, коју смо навели у списку логичких речи на почетку одељка 0.1, и њој придружене речи *онда*. Осим тога треба за нашу дедукцију да се зна и то да је 25. децембар неки датум. Подразумева се још да оно што се тврди у премиси b важи за сваку годину, па и за ову, тј. годину о којој је реч у реченицама p и q.

Полазећи од овог примера може да се направи једна слична, мало мање природна, дедукција, која међутим зависи само од значења речи *ако* и *онда*. Заменимо просто премису b следећом премисом:

(c) Ако p, онда q.

Из премиса c и p може да се закључи q. При томе би p и q могле да буду било које реченице па да опет имамо исто. Једине речи које су значи битне у овој дедукцији су речи *ако* и *онда*.

За израз „Ако p, онда q" са словима p и q каже се да показује форму реченице „Ако 25. децембар по грегоријанском календару пада у среду, онда 25. децембар по јулијанском календару пада у уторак“, а за дедукцију која из премиса „Ако p, онда q“ и p води до закључка q каже се да је *формална*. Логика се бави таквим формалним дедукцијама, у којима су битне само логичке речи, речи са списка на почетку текста горе и њима сродне речи. Речи *ако* и *онда,* на чијем значењу се та дедукција искључиво заснива, су логичке, за разлику од речи *јулијански календар*, *уторак* и других речи из претходних примера.

Наша формална дедукција са премисом c следи следеће правило везано за значење речи *ако* и *онда*, које се зове *модус поненс*:

Из „Ако p, онда q“ и p закључи q.

Латинско *modus ponens* би могло да се преведе са *постављајући начин*, а зашто се то правило зове баш тако није битно. То једно латинско име је и данас живо, и још понека, али је велики број тих старих имена нестао, и добро је што је тако. Посао логике није да измишља живописна имена, него да опише законитости логике на други, математички, систематичнији, начин.

У алгебри имамо *константе*, тј. симболе, знаке, са фиксираним значењем, за операције које нас занимају – за друго имамо *променљиве*. Да бисмо казали да је сабирање комутативно имамо константу + и променљиве x и y, и са тим кажемо да је $x + y$ једнако $y + x$. Тако ћемо у логици имати константе за логичке речи као што су *ако* и *онда*, а за друго ћемо имати променљиве, као што су горе у модус поненсу променљиве p и q. У најобичнијем случају, алгебарске променљиве као што су x и y стоје место произвољних бројева (оне иначе могу да стоје и место разних произвољних ствари). Променљиве p и q стоје међутим место произвољних *исказа*, а искази су реченице којима ћемо се бавити у одељку 1.1.

1. ИСКАЗНА ЛОГИКА

1.1. Искази

Део логике који се бави везницима не зове се *логика везника*, као што би можда требало, него се зове *исказна логика*. Неки пут се каже и *исказни рачун*, при чему се реч *рачун* овде користи као када се основна математика у школи назива рачуном. (Иста та реч, *рачун*, може да се схвати и у ужем смислу, када се односи на системе као што су аксиоматски системи.)

Исказ је технички термин у логици, математици и филозофији који се односи на једну важну – многи би рекли најважнију – врсту реченица. То су реченице којима може да се *тврди*, реченице које могу да буду или не буду *тачне*. Каже се још, нпр. у математици, да те реченице *важе* или не.

Једна од основних – многи мисле најосновнија – употреба језика је када се језиком служимо да бисмо нешто *тврдили*, а када нешто тврдимо, то што кажемо може да буде тачно или не. Да бисмо нешто тврдили служимо се реченицама које ћемо, као што рекосмо, да зовемо исказима. Искази су нпр. реченице „Збир два непарна броја је паран“ и „Руже моје бабе су исто тако жуте као мој деда, који је био Кинез“, од којих је први тачан, а други има мало изгледа да то буде када је изговори велики број читалаца ове књиге. Због речи *моје* и *мој* у тој реченици не зна се о ком се исказу ради док се не сазна ко је тај који говори. Обичан језик је пун таквих неодређености, које да бисмо добили исказе треба да елиминишемо и достигнемо прецизност која је у математици много више присутна. Имамо је у првој малопређашњој реченици.

Термин *суд* је раније коришћен место *исказ*, али је застарео (у варијанти српског у употреби у Србији). *Тврђење* је сродан термин који се међутим мање користи, или се користи у неком посебном значењу, као што ћемо и ми чинити касније (в. одељке 1.12, 1.14, 1.15, 1.16, 1.19 и 2.11). И сама употреба језика када се језиком служимо да нешто тврдимо може да се назове *тврђење*, а та употреба није оно на шта желимо да се односи реч *исказ*. (Реч *тврдња* се пак овде не користи.) Ми тврдимо, ми се бавимо тврђењем, помоћу исказа. Под утицајем енглеског, у новије време се понегде наилази на реч *пропозиција* место *исказ*, али говорити тако је још увек знак необразованости, необавештености.

Са тачке гледишта логике, веома важна употреба језика је и када се језиком служимо да нешто *именујемо*. У логици пре XIX века именовање је можда имало првенство над тврђењем, док је данас пре обрнуто. Трећа употреба језика важна за логику била би у дедуковању.

Језик осим тих има многе друге употребе. Њиме можемо да се служимо да бисмо питали, заповедали, претили, обећавали, молили,... За неке од тих употреба користимо опет реченице, али направљене на посебан начин, као што су питања и реченице у императиву, како се у граматици зове заповедни начин грађења реченица. За неке употребе које се разликују од тврђења користимо међутим реченице направљене на исти начин као што је онај који се обично везује за исказе – граматичким терминима речено, реченице у индикативу. У индикативу су оне две реченице горе, које смо дали за пример и којима нешто тврдимо, али и реченица „Не смеш то да заборавиш" којом можемо заповедати, претити или молити. У тим случајевима за ту реченицу нема смисла питати да ли је тачна или није. Може такође да се деси да нешто тврдимо питањем, као када „Јеси ли ти крштен?" употребимо у смислу „Ти ниси нормалан", или пак реченицом у императиву, као када „Причај ти то другом!" употребимо у смислу „Не верујем ти" – само то није често.

У класичној логици, којом ћемо ми да се бавимо, за тачне исказе се каже да су *истинити*, а за нетачне да су *неистинити*, или, краће, *лажни*, и каже се још да искази могу да имају две *истиносне вредности*: *истину* и *лаж*. Употреба речи *лажни* и *лаж* није овде сасвим обична. Обичније би било уместо тога рећи *неистинити* и *неистина*, али су *лажни* и *лаж* краће речи, лакше се изговарају, и зато су згодније. Са тим краћим речима, којима ћемо надаље да се служимо, добијамо један технички начин изражавања који је прилично, мада не сасвим, у складу са обичним српским језиком. Ни придев *истиносни* није обичан. (Изведен је од *истин*, које се у српском јавља у „правди Бога истинога"; *истинитосни*, што је изведено од обичнијег *истинит*, је међутим исто тако необично, а дуже је и теже се изговара.)

Истиносне вредности су само те две. Класична логика је *двовредносна*. Не постоји никаква трећа могућа истиносна вредност, нешто као нпр. *можда је истина*, *није сигурно*, *још се не зна*. Одговор на питање да ли је нешто тачно овде је *да* или *не*, и нема ничег више. Неки пут се класична логика зове *двовредносном логиком*, а каже се још и *буловска логика*, по Булу споменутом на почетку одељка 0.2.

У некласичним логикама за тачне исказе не би се рекло да су истинити, него нешто друго. У интуиционистичкој логици (в. одељак 1.18), рекло би се да се могу доказати, да су *доказиви*, што је слично придеву *провериви*. И доказивост и проверивост су овде везани за човека, док је истина независна од њега.

Понекад се узима да исказ није баш реченица, него нешто што стоји иза реченице, њено *значење*. Различитим реченицама које значе исто, као што су реченице „Мој шнајдер је богат", „Мој кројач има штошта у изобиљу" и „My tailor is rich", одговарао би један исти исказ.

1.2. Везници

Термин *везник* је у логици преузет из граматике, али не у сасвим истом значењу. Везник је у логици нешто са чим се граде, праве, искази од исказа. Тако нпр. реч *и* повезује исказе „Мачка оде“ и „Мишеви коло воде“ у исказ „Мачка оде и мишеви коло воде“, који је једна сложена реченица. У граматици имамо то, али имамо и везнике који повезују друге ствари – именице, глаголе, придеве, прилоге,... То нпр. чини везник *и* у исказима „Марко и Јанко су јунаци“, „Марко пева и плаче“, „Марко је храбар и поштен“ и „Марко се брзо и лепо опоравио“. Први од тих исказа би могао да се сматра као замена за исказ „Марко је јунак и Јанко је јунак“, и слично за друге, али „Марко и Јанко су побратими“ није замена за „Марко је побратим и Јанко је побратим“. (Нити је „Два и три је пет“ замена за „Два је пет и три је пет“.)

Логика се међутим не бави свим могућим везницима који повезују исказе. Главни су везници *и*, *или*, *ако* и *не*, а има још неких који се праве од ових. Везник *и* се зове *конјункција*, везник *или* зове се *дисјункција*, а везник *ако*, уз који обично иде *онда*, зове се *импликација*. (Савремени правопис тражи, у нескладу са вуковским начелима, да се *конјункција* не пише са *њ* него са *нј*, као и *конјунктив*, *конјунктивитис* и *инјекција*.)

Исказ добијен повезивањем два исказа помоћу везника конјункције и сам се зове конјункција. Конјункцијом се дакле назива и везник *и* и исказ као што је „Мачка оде и мишеви коло воде“, саграђен помоћу *и*, где је *и* главна реч (упоредити са главним везником у одељку 1.9). Исто важи за дисјункцију и импликацију. Искази повезани конјункцијом зову се *конјункти*. У „Мачка оде и мишеви коло воде“ конјункти су „Мачка оде“ и „Мишеви коло воде“. Искази повезани дисјункцијом зову се *дисјункти*, а код исказа повезаних импликацијом први се зове *антецеденс*, а други *консеквенс*.

За везнике који повезују два исказа, као што су конјункција, дисјункција и импликација, каже се да су *бинарни*; то се пише и 2-*арни* (а могла би можда да се уведе и реч *двомесни*). Бинарни везник обично стоји између два исказа које повезује, као нпр. у „Мачка оде и мишеви коло воде“ и у „Мачка није ту или мишеви мисле да мачка није ту“. У првом исказу везник конјункције уметнут је између конјунката које смо малочас навели, стоји између њих, а у другом везник дисјункције стоји између дисјунката „Мачка није ту“ и „Мишеви мисле да мачка није ту“.

Ако стоји међутим на почетку сложене реченице, а *онда*, које може и да се изостави, стоји (заједно са запетом) између антецеденса и консеквенса, као нпр. у „Ако мачка оде, онда мишеви коло воде“, где је антецеденс „Мачка оде“, а консеквенс „Мишеви коло воде“. Дешава се у природном језику да и конјункција и дисјункција стоје и на почетку, као у „И Марко је јунак и Јанко је јунак“ и „Или мачка није ту или мишеви мисле да мачка није ту“. Логика међутим не воли такве ствари. Код ње ће бинарни везници увек да буду уметнути, или, ако се договоримо друкчије, увек испред, али наведени само једном, а не двапут као у овим примерима са по два *и* и два *или*.

Реч *не* функционише као везник с којим се од једног исказа, нпр. „Звоне звона“, гради исказ „Не звоне звона“. Ако исказ не почиње глаголом као „Звоне звона“, него имамо „Звона звоне“, онда „Не звона звоне“ није добар српски. Обично желимо да везник стоји на почетку, да не морамо да га умећемо као у „Звона не звоне“. Да бисмо то постигли можемо да узмемо као замену за *не* израз *није да*, и надаље када, ради једноставности, будемо говорили о *не,* све то може да се односи на *није да*. (Још једна могућност осим *није да* је *није истина да*.) За реч као *не*, коју у логици схватамо као везник који се примењује на само један исказ, каже се да је *унарни* везник; то се пише и 1-*арни*. Везник *не* се зове *негација*, а негацијом се, као и код бинарних везника горе, зове и исказ који почиње са *не* (или *није да*), исказ где је негација главна реч.

За бинарне везнике каже се да имају *арност* 2, а за унарне да имају арност 1. Можемо да замислимо везнике чија је арност било који природни број. С везником арности n, тј. са n-арним везником, гради се исказ од n исказа. Симбол n (што је мало латиничко курзивно N, а не мало ћириличко курзивно П) користи се обично као променљива за природне бројеве; значи, n је неки од бројева 0, 1, 2, 3,...

Везник арности 3, *тернарни* везник, је нпр. везник *ако* __, *онда* __; *иначе* __ који имамо у исказу „Ако мачка оде, онда мишеви коло воде; иначе мишеви се крију“. Тај везник, који се пуно среће у програмским језицима, може да се направи преко бинарних везника импликације и конјункције и унарног везника негације. Место нашег исказа са тернарним везником може да се стави „Ако мачка оде, онда мишеви коло воде и ако мачка не оде, онда се мишеви крију“; овде „мачка не оде“ стоји место „није да мачка оде“.

У овом последњем примеру, место реченице „Мишеви се крију“ за исти исказ имамо иза другог *онда* „се мишеви крију“. Логика не обраћа пажњу на такве граматичке варијације, као што је овде та промена реда речи коју тражи природни језик. Формални логички језик фиксираће један ред речи и неће дозвољавати да се он мења. У нашем примеру би такође било природније на српском да се место везника *и* стави везник *а*: „Ако мачка оде, онда мишеви коло воде, *а* ако мачка не оде, онда се мишеви крију“. Логика неће међутим разликовати *и* од *а* – за њу ће та два везника значити исто. Зато што у класичној логици приликом одређивања значења везника важи принцип којим ћемо да се бавимо у следећем одељку 1.3.

1.3. Истиносна функционалност

Истиносна функционалност је важан принцип који у класичној логици важи приликом одређивања значења везника. Тај принцип каже да истиносна вредност сложеног исказа зависи искључиво од истиносне вредности простијих исказа од којих је сложени исказ саграђен. Значи, зависи од тога, и ни од чега више. Математичким језиком речено, постоји *функција* која истиносним вредностима простијих исказа, као *аргументима*, приписује, додељује, тачно једну истиносну вредност сложеног исказа, као *вредност* (в. одељак 2.12). То је слично томе како вредност збира $a + b$ зависи искључиво од тога колики су сабирци a и b, аргументи тог збира.

Конјункција је у логици истинита, тј. има истиносну вредност *истина*, ако су оба конјункта истинита; иначе, ако је бар један од конјунката лажан, онда је и она лажна, тј. има истиносну вредност *лаж*. „Новак је кадар стићи и Новак је кадар утећи" је истинито ако је истинито и „Новак је кадар стићи" и „Новак је кадар утећи"; ако један од та два конјункта није истинит, што значи да Новак није у стању да стигне или није у стању да побегне, онда ни конјункција није истинита.

Потпуно исто важи и за конјункцију *и* и за везник *а*. „Марко је јунак а Јанко оклева" је истинито ако је истинито и „Марко је јунак" и „Јанко оклева", и истинито је само у том случају; иначе је лажно. Оно по чему се везник *а* разликује од везника *и*, некаква неодређена супротност у којој се други конјункт налази у односу на први, логику не занима. Водити рачуна о томе било би обратити пажњу на још нешто осим на истиносну вредност, па бисмо тако прекршили истиносну функционалност.

Исто тако, логика не разликује везник *и* од везника *па*, за који се везује временски след, или однос између узрока и последице, као у исказу „Јерина је решила да сазида куле па је ударила намет на вилајет". Ти додаци на истиносну функционалност могу да буду присутни и у самом везнику *и*, као у исказу „Јерина је решила да сазида куле и ударила је намет на вилајет".

Логика све те додатке занемарује, и зато не узима посебно у обзир многе везнике, као што су *а*, *па*, *али*, *те*, *него*, *док*, *где*, *када*, *чим*, *јер*, *пошто*, *осим што*, *зато што*, *као што*, *не би ли*, *будући да*, *иако*, *мада* и други. Она узима у обзир само истиносно-функцијску страну тих везника, а онда се они своде на неки њен истиносно-функцијски везник, као што се *а* и *па* своде на *и*.

Везник је *истиносно-функцијски* када се с њим граде сложени искази чија се истиносна вредност одређује држећи се принципа истиносне функционалности.

Рекли смо у прошлом одељку 1.2 да можемо да замислимо везнике чија је арност било који природни број, па чак и број нула. Шта би били нуларни истиносно-функцијски везници? То су везници којима за грађење исказа не треба неки други исказ. Ти везници су већ искази. И пошто нас занима само истиносновредносна страна ствари, има два таква везника, и ниједан више. Један је истинити исказ, а други је лажан исказ. Није важно који су то тачно искази, само да имају те две различите истиносне вредности. Могу то да буду нпр. искази $2+2=4$ и $2+2=5$.

Обележимо сада истиносну вредност *истина* са 1, а истиносну вредност *лаж* са 0. Нуларних истиносно-функцијских везника има значи два; један који увек има вредност 1, и други који увек има вредност 0; тај други се зове *апсурд*. Први од та два везника означаваћемо симболом $\top$ (који се чита *те*), а други симболом $\bot$ (који се чита *нете*). Нуларни везници се неки пут називају и *исказне константе*.

А колико има унарних истиносно-функцијских везника? Има их четири. Један је *идентични* везник, с којим се од сваког исказа гради исказ чија је истиносна вредност иста као истиносна вредност почетног исказа. То би био везник *истина је да*. Исказ „Истина је да звоне звона“ има исту истиносну вредност као „Звоне звона“. Други је везник негације. Ту је истиносна вредност сграђеног исказа супротна истиносној вредности почетног исказа. „Не звоне звона“ има истиносну вредност 1 ако „Звоне звона“ има истиносну вредност 0, и има истиносну вредност 0 ако „Звоне звона“ има истиносну вредност 1.

Постоје још два унарна истиносно-функцијска везника. Један, *увек истина*, с којим се од сваког исказа гради исказ који има истиносну вредност 1, и други, *увек лаж*, с којим се од сваког исказа гради исказ који има истиносну вредност 0. За први можемо да узмемо нпр. унарни везник с којим се од „Звоне звона“ гради исказ „Звоне звона или не звоне звона“, а с другим нека се од тог истог исказа гради исказ „Звоне звона и не звоне звона“. Ако је p произвољан исказ (нешто као „Звоне звона“) а α је унарни везник (нешто као негација), и ако је αp резултат примене α на p (нешто као „Не звоне звона“), онда можемо представити помоћу следеће табеле како се понашају наша четири унарна везника у односу на истиносне вредности:

p	$\alpha_{\mathrm{I}} p$	$\neg p$	$\alpha_{\top} p$	$\alpha_{\bot} p$
1	1	0	1	0
0	0	1	1	0

Везник α_{I} је унарни идентични везник, $\neg$ је негација, $\alpha_{\top}$ је унарни везник увек истина, а $\alpha_{\bot}$ је унарни везник увек лаж. Везник α_{I} се обично не пише, док за $\alpha_{\top}$ и $\alpha_{\bot}$ нема неког посебног симбола. Исказ $\alpha_{\top} p$ има увек исту истиносну вредност као $\top$, а $\alpha_{\bot} p$ као $\bot$. Симбол $\neg$ за везник негације је уобичајен (а среће се још место тога, мада све ређе, и симбол тилда ~). Део наше табеле који се односи на негацију може онда да се представи следећом таблицом:

$\neg$	p
0	1
1	0

Такве таблице се зову *истиносне таблице*.

Логика се бави и унарним везницима који нису истиносно-функцијски, а међу њима су најзначајнији испали везници *нужно је да*, *могуће је да* и *доказиво је да*. Они се изучавају у *модалној логици*, која би могла да се окарактерише као општа теорија унарних везника.

1.4. Конјункција и дисјункција

Нека p и q буду произвољни искази, не обавезно различити, и нека $\wedge$ буде симбол за везник конјункције, замена за *и*. (Среће се још место тога и симбол &.) Онда оно што смо рекли у прошлом одељку о истиносној вредности конјункције као функцији истиносних вредности њених конјунката може да се представи следећом истиносном таблицом:

p	$\wedge$	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

Ту таблицу читамо онако како смо читали истиносну таблицу за негацију на крају прошлог одељка. У првом реду испод $p \wedge q$ имамо случај када и p и q имају истиносну вредност 1, у реду испод тога случај када p има истиносну вредност 1 а q истиносну вредност 0, итд. Могућа су само та четири случаја. У средишњој колони пише која је истиносна вредност конјункције $p \wedge q$ у сваком од тих случајева.

Нека $\vee$ буде симбол за везник дисјункције, замена за *или*. Онда истиносна вредност дисјункције као функција истиносних вредности њених дисјунката може да се представи следећом истиносном таблицом:

p	$\vee$	q
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

На основу те таблице, дисјункција је лажна ако су оба дисјункта лажна; иначе, ако је бар један од дисјунката истинит, онда је и она истинита. То исто смо имали за конјункцију, само што истина и лаж замене места. Средишња колона у истиносној таблици за дисјункцију добија се из средишње колоне истиносне таблице за конјункцију тако што јединице и нуле замене места и колона се окрене наопако.

Три последња реда у тој таблици се врло лепо слажу са обичном употребом везника *или*. Заиста, да би „Пада киша или звоне звона“ било истинито довољно је да пада киша, а довољно је и да звоне звона; да би та дисјункција била лажна треба и да не пада киша и да не звоне звона. Али шта ако су оба дисјункта истинита, ако и пада киша и звоне звона? У обичној употреби ту смо несигурни. Зашто стоји *или* када може да стоји *и*? Ту осећамо потребу да напоменемо да не искључујемо да су оба дисјункта истинита. Јер неки пут то је искључено – пада киша или не пада киша. Ако за ту, можда обичнију, *искључујућу* дисјункцију узмемо симбол ∇, онда за њу имамо истиносну таблицу:

p	∇	q
1	0	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

По тој таблици исказ $p \nabla q$ је истинит ако p и q имају различиту истиносну вредност; иначе је лажан.

Можда у обичном језику *или* чешће стоји за везник ∇ него за *неискључујућу* дисјункцију $\vee$. Зато осећамо потребу да напоменемо када је то потребно да се ради о неискључујућој дисјункцији, па кажемо нпр. „Пада киша или звоне звона, а у недељу и једно и друго“. (Тако се каже за кишовиту варош Минстер.) И зато се та дисјункција неки пут пише *и/или*, што је недавно узето из бирократског енглеског.

У математици међутим *или* треба увек да буде неискључујућа дисјункција. (Математичар који би написао *и/или* је неписмен.) Тако треба да буде и у филозофији, и у сваком прецизном језику који се ослања на логику. Разлог за то је веза са конјункцијом коју смо споменули испод истиносне таблице за $\vee$. Конјункција је основни везник, и та веза показује да је неискључујућа дисјункција скоро исто толико основна. Та веза чини логичке законе правилнијим. Боље је те законе систематисати преко неискључујуће дисјункције, а онде извести законе за искључујућу дисјункцију. Јер ако бисмо, обрнуто, узели искључујућу дисјункцију као основну и преко ње покушали да систематишемо логичке законе, то може да се учини, али тако бисмо отежали себи посао. Надаље ће за нас *или* да значи $\vee$, а *дисјункција* ће да значи *неискључујућа дисјункција*. Кад будемо хтели да говоримо о везнику ∇, рећи ћемо *искључујућа дисјункција*.

1.5. Импликација и еквиваленција

Логика не следи слепо обичан језик. Да бисмо били прецизнији, да ствари буду правилније, обичан језик треба ту и тамо да се дотера, поправи. Увешће се нешто вештачко, али једноставније и правилније. То је већ био донекле случај са дисјункцијом, која је помало вештачки узета увек као неискључујућа. То ће бити још много више случај са импликацијом. Ту ће истиносна функционалност изазвати много веће промене. Како се та истиносно-функцијска импликација класичне логике доста разликује од импликације обичног језика, за њу се користи и специјалан термин *материјална импликација*; може да се каже и *класична импликација*.

Надаље ће реч *импликација* за нас да значи *материјална импликација*. Ако будемо желели да кажемо нешто о некој другој импликацији, онда ту другу морамо некако посебно да назовемо (као што чинимо за интуиционистичку импликацију у одељку 1.18).

Нека $\rightarrow$ буде симбол за везник импликације, тако да $p \rightarrow q$ стоји место *ако* p, *онда* q. (Среће се још место тога и симбол $\Rightarrow$, и данас застарели симбол $\supset$, који се зове *потковица*.) Јасно је да ако је антецеденс p истинит а консеквенс q лажан, онда $p \rightarrow q$ мора бити лажно. „Ако мачка оде, онда мишеви коло воде“ је лажно ако је мачка отишла а мишеви не воде коло. Може се затим десити да та импликација буде истинита ако су антецеденс и консеквенс оба истинити и ако су оба лажни. Из тога што мишеви не воде коло можемо позивајући се на истинитост те импликације закључити да мачка није отишла. Ако је антецеденс лажан, тј. мачка није отишла, а консеквенс је истинит, тј. мишеви коло воде, може опет да се деси да је наша импликација истинита, јер се ради о неким дрским мишевима који у сваком случају воде коло, без обзира да ли је мачка ту.

То сугерише следећу истиносну таблицу за импликацију, по којој за истиниту импликацију тражимо само да консеквенс не буде мање истинит од антецеденса:

p	$\rightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

По тој таблици импликација је истинита када је антецеденс лажан или када је консеквенс истинит. (То *или* је неискључујућа дисјункција.) Према томе, $p \rightarrow q$ имаће увек исту истиносну вредност као $\neg p \vee q$, што показује следећа истиносна таблица:

$\neg$	p	$\vee$	q
0	1	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	0	1	0

Проблем са истиносном таблицом за $\rightarrow$ је тај што у првом, трећем и четвртом реду испод $p \rightarrow q$ није јасно да истиносна вредност импликације треба да буде одређена само истиносном вредношћу антецеденса и консеквенса. Није јасно да ли треба да важи истиносна функционалност. Можда се и да разумети да је импликација која има истинит консеквенс увек истинита. Јер, будући да је тај консеквенс истинит, имамо га без обзира на то шта се антецеденсом претпоставља. Али зар је довољно да антецеденс буде лажан, па да импликација буде истинита? Кад имамо неку мачку која никад не излази, испадне да „Ако мачка оде, онда мишеви коло воде" мора бити истинито, без обзира на то о каквим се мишевима ради и чему су они склони.

Ствари се додатно компликују ако имамо чудне импликације где антецеденс и консеквенс немају везе један са другим. „Ако збир два непарна броја није паран, онда мишеви коло воде" је истинита импликација јер је антецеденс лажан, а „Ако мачка није ту, онда је збир два непарна броја паран" је истинита импликација јер је консеквенс истинит. Логика не забрањује такве чудне, прилично бесмислене, исказе. Граматика уосталом не каже да то нису реченице. Само им је значење нејасно.

Сигурно је међутим да је истиносна таблица за материјалну импликацију једина у складу са запажањима која претходе тој таблици. Материјална импликација није импликација обичног језика, али јој је међу истиносно-функцијским везницима најближа. А када доста нејасну и замршену импликацију обичног језика заменимо правилном и једноставном материјалном импликацијом, бићемо у добитку. Та замена и тај добитак су карактеристични за математику.

Импликацију $p \to q$ могли бисмо да читамо и као *p само ако q*. „Ако мачка оде, онда мишеви коло воде" значи да је мачка отишла само ако мишеви коло воде. Ако су мишеви мирни, мачка је ту.

Везник *само ако* има ту предност над *ако* што стоји између два исказа, као и везници *и* и *или*. Тај уметнути положај бинарног везника није међутим нешто толико важно. Могли би бинарни везници да стоје и увек испред (или пак увек позади), ако се тако договоримо, и то чак има неких предности. (Нотација где су везници увек испред зове се *пољском*, и у тој нотацији су заграде непотребне; в. одељак 1.9; *ако* без *онда* обично се користи на пољски начин.) Унарни везници не могу да буду уметнути, а и код n-арних где је n веће од 2 није јасно где је тачно место у средини где би требало уметнути везник. Уметнути положај бинарних везника је ипак пожељан због тога што је исти као положај бинарних операцијских симбола плус и пута у аритметици, а на такав положај операцијских симбола смо иначе навикли. (Тај положај на који смо навикли ваљда није изабран случајно – симетрија на којој је он заснован изгледа олакшава читање; в. одељак 1.9.)

Када је импликација $p \to q$ истинита каже се да p имплицира q, да p повлачи q, да из p следи q, да је p довољан услов за q, да је q неопходан услов за p и да је q нужан услов за p (неки пут се каже и да је q потребан услов за p). Када кажемо *p ако q* то дабоме значи исто што и *ако q, онда p*.

Сада ћемо да размотримо један бинарни истиносно-функцијски везник који још нисмо споменули, а који се зове *еквиваленција*. То је везник *ако и само ако*, за који имамо симбол $\leftrightarrow$. (Срећу се још место тога и симболи $\Leftrightarrow$, $\equiv$ и, ређе, $\sim$; неки пут се *ако и само ако* пише скраћено *акко*.) Као што смо чинили за друге бинарне везнике, еквиваленцијом зовемо и исказ добијен повезивањем два исказа помоћу везника еквиваленције, исказ где је тај везник главна реч.

Исказ *p ако и само ако q* имаће увек исту истиносну вредност као исказ *p ако q и p само ако q*, или исказ *p само ако q и p ако q*, или пак исказ *ако p, онда q и ако q, онда p*. Исказ $p \leftrightarrow q$ може да се третира као скраћеница за $(p \to q) \wedge (q \to p)$. За еквиваленцију имамо следећу истиносну таблицу:

$(p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\to$	$p)$,	тј.	p	$\leftrightarrow$	q
1	1	1	1	1	1	1		1	1	1
1	0	0	0	0	1	1		1	0	0
0	1	1	0	1	0	0		0	0	1
0	1	0	1	0	1	0		0	1	0

По тој таблици еквиваленција $p \leftrightarrow q$ је истинита ако p и q имају исту истиносну вредност; иначе је лажна. То је обрнуто од оног што смо имали за искључујућу дисјункцију, па бисмо $p \nabla q$ могли да узмемо као скраћеницу за $\neg (p \leftrightarrow q)$.

1.6. Други бинарни везници

Које још бинарне истиносно-функцијске везнике имамо осим тих са којима смо се до сада срели? Имамо прво два бинарна везника, означимо их са β_p и са β_q, који су такви да $p \, \beta_p \, q$ има увек исту истиносну вредност као p, а $p \, \beta_q \, q$ има увек исту истиносну вредност као q. Та два бинарна везника су исте врсте као унарни везник α_{I} с краја одељка 1.3. Имамо још и бинарни везник $\beta_\top$ такав да $p \, \beta_\top \, q$ има увек исту истиносну вредност као $\top$, тј. увек има истиносну вредност 1. Бинарни везник $\beta_\top$ је исте врсте као унарни везник $\alpha_\top$ с краја одељка 1.3. Место $p \, \beta_p \, q$ писаће-мо p, место $p \, \beta_q \, q$ писаћемо q и место $p \, \beta_\top \, q$ писаћемо $\top$.

Та три везника и пет претходно размотрених бинарних везника распоредиће-мо на следећи начин у теменима два квадрата:

$p \vee q$ 1110 $\qquad\qquad$ $\top$ 1111

p 1100 $\qquad$ q 1010 $\qquad\qquad$ $q \to p$ 1101 $\qquad$ $p \to q$ 1011

$p \wedge q$ 1000 $\qquad\qquad$ $p \leftrightarrow q$ 1001

Поред сваког везника пишемо четворочлани низ нула и јединица који чини сре-дишњу колону његове истиносне таблице; пишемо га слева надесно уместо одгоре надоле.

Импликације $q \to p$ и $p \to q$ нису исти везник, што се види по различитим низовима нула и јединица. Једно је импликација, а друго је обрнута импликација. У $q \to p$, што смо могли да напишемо и помоћу новог симбола $\leftarrow$ као $p \leftarrow q$, имамо уметнути везник *ако* с којим се гради p *ако* q, а у $p \to q$ имамо уметнути везник *само ако* с којим се гради p *само ако* q, што се чита и као *ако* p, *онда* q.

Не постоје међутим два различита везника $p \leftrightarrow q$ и $q \leftrightarrow p$. Низ нула и јединица за $(p \to q) \wedge (q \to p)$ и за $(q \to p) \wedge (p \to q)$ је у оба случаја 1001.

У левом квадрату се налазе сви четворочлани низови нула и јединица који почињу са 1 и завршавају са 0, а у десном квадрату сви четворочлани низови нула и јединица који почињу и завршавају са 1. Остаје још осам четворочланих низова нула и јединица, од којих сваки одговара једном истиносно-функцијском бинарном везнику, као средишња колона његове истиносне таблице. Тих преосталих осам везника су негације осам везника из наша два квадрата, тј. $\neg(p \wedge q)$, $\neg p$, $\neg q$ и $\neg(p \vee q)$, као негације везника из левог квадрата, и $\neg(p \leftrightarrow q)$, $\neg(q \rightarrow p)$, $\neg(p \rightarrow q)$ и $\neg\top$, као негације везника из десног квадрата. Пошто $\neg(p \leftrightarrow q)$ има увек исту истиносну вредност као $p \nabla q$, ту имамо у ствари везник искључујуће дисјункције, а на исти начин $\neg\top$ је у ствари $\bot$. Бинарни везник $\neg(p \vee q)$ је у ствари везник *ни* __ *ни* __, с којим се од *p* и *q* гради *ни p ни q* (в. одељак 1.15).

Наша два квадрата нацртана горе можемо да сместимо у коцку. Са њима добијамо предњу и задњу страну једне коцке. Негирањем везника у теменима те коцке добили смо још два квадрата, које исто смештамо у једну коцку – негирану коцку. Те две коцке можемо онда да сместимо у једну четвородимензионалну коцку – хиперкоцку. Наша прва коцка и негирана коцка су као предња и задња страна те хиперкоцке.

Бинарних истиносно-функцијских везника има значи 16, што је 2^k где је $k = 2^2 = 4$. Унарних је било 4, што је 2^k где је $k = 2^1 = 2$, нуларних је било 2, што је 2^k где је $k = 2^0 = 1$, а n-арних ће да буде 2^k где је $k = 2^n$. Када n расте, веома брзо ће да страшно порасте број 2^k. Тернарних истиносно-функцијских везника, где је $n = 3$, има 256; за $n = 4$ добијамо 65 536, за $n = 5$ добијамо број већи од 4 милијарде, а за $n = 6$ добијамо број 2^{64}, који је већи од 18 милијарди милијарди, тј. у децималној нотацији 18 са 18 нула.

Број 2^{64} се иначе јавља у легенди о изуму шаха. Та легенда каже да је изумитељ, тамо негде у Индији, тражио од краља као награду да му стави једно зрно жита на прво поље шаховске табле, у углу, а затим да удвостручи број зрна за свако следеће поље, док их сва не покрије. Збир зрна жита на свим пољима је онда $2^{64} - 1$, што чини планину од жита већу од Хималаја.

1.7. Исказне формуле

У логици налазимо вештачке језике, много једноставније, много правилније и много прецизније од природног језика. Разлог за прављење тих вештачких језика, који се зову *формални језици*, није толико да се њима служимо колико да бисмо испитујући их сазнали нешто о језицима уопште. Главни изрази тих језика, који одговарају реченицама природних језика, зову се *формуле*. Том речју се у математици иначе називају свакакви изрази направљени од математичких симбола. Логичке формуле ће да личе на друге математичке формуле, али ће да буду још прецизније дефинисане.

Формални језици се граде од *симбола*. Обично су то неки знаци написани графитом, мастилом или кредом, али могу да буду и гласови, или предмети, или било шта. Ако су то предмети пожељно је да не буду скупи, да бисмо могли да их репродукујемо у више примерака истог облика, колико год затреба. Зато су написани знаци, као и гласови, згодни, јер се лако и јефтино репродукују. Што се тиче математичке теорије језика, не дефинише се шта је симбол. То може да буде било који математички објекат. (Нешто слично имамо у геометрији, где се не дефинише шта је тачка.) Од симбола се граде сложенији језички *изрази*, тј. сложенији делови језика, који се у математичкој теорији зову *речи*. Обично се узима да су речи коначни *низови* симбола (једна дефиниција коначног низа биће дата при крају одељка 2.2).

У *формалном језику исказне логике*, тј. логике која се бави везницима, формуле, које ћемо звати *исказним формулама*, биће направљене од *симбола за везнике*, помоћних симбола леве и десне заграде и симбола који се зову *исказним промењивима*, или *исказним словима*, као што су слова p и q која смо имали у прошла три одељка 1.4, 1.5 и 1.6. Имамо тамо и нешто примера исказних формула; то су $p \wedge q$, $\neg p \vee q$, $(p \to q) \wedge (q \to p)$, $\neg (p \vee q)$, итд. У тим формулама се види *форма* исказа, коју исказима даје њихово грађење помоћу везника – њихов костур од везника. Све друго осим везника је занемарено.

Исказне формуле биће исте граматичке врсте, исте граматичке категорије, као искази. Оне постају искази када место исказних промењивих ставимо исказе. У логици се под формулама иначе подразумевају изрази који су граматички гледано исте врсте као искази, што у математици не мора да буде увек случај.

Исказне формуле се прецизно дефинишу једном *индуктивном дефиницијом*. Придев *индуктиван* се овде односи на математичку индукцију, а не на оно што се у филозофији зове индукцијом. Индукција је тамо уопштавање. Пошто је сваки Вавилонац кога смо срели био проконзул, а срели смо их довољно, мада не све, закључујемо да су сви Вавилонци проконзули. То закључивање није поуздано.

Математичка индукција је нешто друго. То је потпуно поуздана врста закључивања која се тиче математичких објеката саграђених постепено почевши од најједноставнијих, основних, базних објеката. Базни објекти су као атоми, недељиви. (Грчка реч *атом* долази од *недељив*, као и латинска реч *индивидуа*, која ће касније да нам послужи за прављење неколико техничких термина; в. одељке 2.4, 2.5 и 2.7; честице назване атомима у физици су међутим испале дељиве, супротно оном што се очекивало када им је давано име.) Сложенији објекти се граде на одређени начин од једноставнијих, већ саграђених. То само грађење је оно на шта наилазимо у индуктивним дефиницијама. Главни пример таквог индуктивног грађења је како се природни бројеви граде почевши од базног објекта, тј. најмањег природног броја, нула додавањем јединице на већ сграђене објекте, тј. већ добијене природне бројеве. Индукцијом се дефинише један бесконачан скуп објеката, који су све сложенији.

Математичком индукцијом треба да се закључи да нешто важи за све чланове неког скупа индуктивно дефинисаних објеката. То се чини тако што се утврди прво да то важи за базне објекте – тај се исказ зове *база индукције* – а затим се утврди импликација, која се зове *индуктивни корак*, која каже да ако то важи за једноставније објекте, онда важи и за сложеније. Из базе индукције и индуктивног корака као премиса закључујемо математичком индукцијом то што смо хтели.

База индукције и индуктивни корак омогућавају нам да примењивањем модус поненса (в. одељак 0.4) утврдимо да за произвољни сложени објекат важи то што хоћемо. Пошто имамо бесконачно много индуктивно дефинисаних сложених објеката, математичка индукција замењује бесконачно много примена модус поненса.

Овако изгледа индуктивна дефиниција исказних формула. Претпоставимо да имамо известан број симбола који се зову *исказна слова*, или *исказне променљиве*. Тај број може да буде коначан, али се најчешће узима да је бесконачан, да нам исказних слова никад не зафали. Исказна слова и сви нуларни везници зваће се *атомским исказним формулама*.

Први део наше индуктивне дефиниције, који ћемо исто да назовемо *база*, гласи:

> Свака атомска исказна формула је исказна формула.

Следећи део дефиниције, који ћемо да назовемо *индуктивни корак*, за $n \geq 1$ гласи:

> Резултат примене симбола n-арног везника на n исказних формула је исказна формула.

С тим је наша индуктивна дефиниција завршена. Та дефиниција биће међутим потпуно одређена тек када будемо прецизирали са којим симболима n-арних везника располажемо, за $n \geq 1$, и у чему се састоји примена једног таквог симбола на n исказних формула.

Обично се формуле схватају као коначни низови симбола. Резултат примене симбола n-арног везника γ на исказне формуле $p_1,..., p_n$, које нису обавезно све различите, би онда могао да буде коначан низ симбола $\gamma p_1...p_n$, тј. низ добијен тако што се иза γ ставе коначни низови $p_1,..., p_n$. (Писање γ на крају уместо на почетку низа $p_1...p_n \gamma$, или пак писање низа здесна улево $p_n...p_1 \gamma$, не би дало нешто суштински различито.) Када је $n = 2$, уобичајеније је међутим узети место низа $\gamma p_1 p_2$ низ $(p_1 \gamma p_2)$, где се још јављају и лева и десна заграда као помоћни симболи.

Надаље претпостављамо да имамо ту нотацију са уметнутим бинарним γ и заградама. (О тој нотацији са уметањем рекли смо нешто у одељку 1.5.)

Помоћу заграда смо у стању да за једно такво бинарно γ разликујемо исказне формуле $((p_1 \gamma p_2) \gamma p_3)$ и $(p_1 \gamma (p_2 \gamma p_3))$; са изразом $p_1 \gamma p_2 \gamma p_3$ не бисмо знали коју имамо од тих двеју различито сграђених исказних формула. У префиксној нотацији са $\gamma p_1 p_2$, која се зове *пољском* (јер потиче из Пољске), заграде нису потребне. Наше две исказне формуле онда постају $\gamma \gamma p_1 p_2 p_3$ и $\gamma p_1 \gamma p_2 p_3$. Јесте да смо уштедели на заградама, али су формуле необичне.

Што се тиче избора везника има их разних. Ми немамо овде један једини формални језик исказне логике, него разне сродне језике који се разликују по избору везника, ако се не разликују још по томе да ли су у пољској нотацији или нису. Претпоставимо за сада да имамо $\top$ и $\bot$ за нуларне везнике, $\neg$ за унарни везник негације, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$ за бинарне везнике, и никакве друге симболе за везнике тих или већих арности. Примена симбола бинарних везника биће, у складу са оним што смо горе рекли, уметање између p_1 и p_2 уз помоћ заграда, као код $(p_1 \gamma p_2)$.

Претпоставља се да је све што је исказна формула добијено позивањем или на базу или на индуктивни корак. Део базе који се односи на нуларне везнике могао би да се схвати као случај индуктивног корака где је $n = 0$.

Када су p, q и r исказна слова, примери исказних формула су p, q, r, $\bot$, $\neg q$, $(p \vee q)$, $(\neg q \vee \bot)$, $\neg(\neg q \vee \bot)$, $(\neg(\neg q \vee \bot) \vee r)$, $((p \vee q) \wedge (\neg(\neg q \vee \bot) \vee r))$. Обичај је да се најспољашњији пар заграда у исказним формулама изоставља. Подразумева се да он стоји где треба, али се не пише. Тако бисмо међу последњих пет исказних формула четири заменили са $p \vee q$, $\neg q \vee \bot$, $\neg(\neg q \vee \bot) \vee r$ и $(p \vee q) \wedge (\neg(\neg q \vee \bot) \vee r)$, а $\neg(\neg q \vee \bot)$ би остало непромењено. Када се p и q схвате као исказна слова, исказне формуле смо имали и у прошла три одељка 1.4, 1.5. и 1.6, где смо говорили о везницима. У одељку 1.6, у теменима наша два квадрата можемо узети да стоје исказне формуле, и исказне формуле би биле и осам негација тих осам исказних формула.

Приметимо да су исказне формуле као алгебарски изрази написани помоћу променљивих и нпр. операцијских симбола 1 и 0 арности нула, – арности 1, и + и · арности 2. Један такав израз је нпр. $(p + q) \cdot (-(-q + 0) + r)$.

Исказне формуле могу својом дужином да премаше било који природни број. У једној исказној формули може да буде више од 18 милијарди милијарди симбола. За реченице природног језика у принципу исто нема границе коју оне својом дужином не могу да премаше, али је са њима јасно да негде треба стати.

Индуктивна дефиниција исказних формула је граматика формалног језика исказне логике. Тај вештачки језик је веома једноставан, и његова граматика је исто тако веома једноставна. Ни за један природни језик, ни за један његов фрагмент, па ни за фрагмент који би приближно одговарао формалном језику исказне логике, не може се ни помислити на тако кратку и једноставну граматику. Објашњење шта су реченице једног природног језика биће много дуже, много сложеније, много мање правилно и много мање прецизно. Ни новије, математички засноване, граматике природних језика, на које је логика утицала, какве се развијају од средине XX века, неће ту много помоћи (в. одељак 2.15).

У једном формалном језику се недвосмислено може утврдити да ли је неки низ симбола формула тог језика или није. Логичари кажу да је то питање *одлучиво* (в. одељак 0.3). То ће бити случај и у формалном језику исказне логике.

Исказна слова се зову још и *исказне промењиве*. *Промењива* уопште у математици је симбол везан за *супституцију*, тј. замену, без изузетка, *свих* јављања тог симбола истим језичким изразом. Резултат супституције се зове *супституциона инстанца*, или просто *инстанца*. (Могло би да се каже и *инстанција*, али је то дуже.) Помоћу промењивих x и y направили смо нпр. израз $(x + y) \cdot (x + z)$. Супституцијом из тог израза добијамо као инстанце $(2 + 3) \cdot (2 + 7)$, или $(2 + 3) \cdot (2 + 3)$, или $(7 + 3) \cdot (7 + 7)$, или $((x \cdot 2) + (3 + z)) \cdot ((x \cdot 2) + u)$. Нису инстанце тог израза ни $(2 + 3) \cdot (17 + z)$, ни $((u \cdot 2) + 3) \cdot (x + 3)$, јер нису сва јављања промењиве x, без изузетка, замењена истим изразом.

Место промењивих у некој исказној формули могу да се супституишу произвољне исказне формуле, и добијене инстанце су онда опет исказне формуле. А могу да се супституишу и искази који нису у формалном језику исказне логике. Инстанце су онда искази, под условом да симболе за везнике читамо као везнике који им одговарају; симбол $\wedge$ читамо *и*, симбол $\vee$ читамо *или*, итд. Исказна формула показује форму исказа који су њене инстанце. Исказна формула $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$ показује форму следећег исказа, који је њена инстанца, (Мачка оде $\to$ Мишеви коло воде) $\wedge$ ($\neg$ Мачка оде $\to$ Мишеви се крију), тј. исказа „Ако мачка оде, онда мишеви коло воде и ако мачка не оде, онда се мишеви крију“ (тај исказ смо у одељку 1.2 узели као замену за „Ако мачка оде, онда мишеви коло воде; иначе мишеви се крију“).

1.8. Објект-језик и метајезик

Да бисмо дефинисали формални језик исказне логике, тј. да бисмо формулисали дефиницију исказних формула, и уопште да бисмо говорили о том формалном језику, служимо се неким језиком. Тај језик је овде српски језик. То није најобичнији српски, јер се у њему јављају неки технички термини као *атомска исказна формула*, *n-арни везник*, *примена симбола n-арног везника*,... У текстовима о логици мање основним од овог то је *математички српски*, са својим специфичним симболима, речником и стилом. Овде не говоримо баш математичким српским, него једним његовим почетничким дијалектом.

За формални језик који дефинишемо каже се да је *објект-језик* – то је језик који је предмет наших истраживања – а за језик у којем се тај објект-језик дефинише и у којем се говори о њему каже се да је *метајезик*. У прошлом одељку 1.7 објект-језик је значи један формални језик исказне логике, а метајезик је некакав српски, тј. један природни језик.

Та два термина, *објект-језик* и *метајезик*, иду заједно, и релативни су један у односу на други. Мада се користе највише, ако не једино, у логици, ти термини имају смисла и ван ње. Ако пишемо граматику грчког на српском, онда је грчки објект-језик, а српски метајезик, а ако пишемо граматику грчког на грчком, и објект-језик и метајезик су грчки.

Могу да настану неке филозофске недоумице, и око метајезика може да се створи нешто мало метафизичке магле, ако се упитамо да ли и метајезик неког формалног објект-језика може да буде формалан. То би требало да буде неки формални језик богатији од формалног језика исказне логике, какви ће нам бити на дохват руке у предикатској логици. На ком ће језику да буде дефинисан тај формални метајезик, и на ком језику може о њему да се говори? Ваљда опет на природном језику. А може ли и тај *мета-метајезик* да се формализује? Може ли највиши језик у тој хијерархији да буде формалан? Можда и може у принципу, ако сви већ знају тај језик, и на њему могу да се пишу књиге за неку публику. Такве публике за сада нема.

Ми почињемо да говоримо на природном језику, и то је језик којим се споразумевамо, који нас обједињује. Формалне језике учимо преко граматика за њих које су на природном језику (као што је она из прошлог одељка 1.7). Формални језици су за људе други језици, а природни језици први језици. Да ли би међутим могао формални језик да буде први језик? Како би се тај језик учио као први језик?

Мада је метајезик старији од објект-језика, бављење објект-језиком може повратно да утиче на њега. У ситуацији у којој се ми налазимо са формалним објект-језиком исказне логике и српским метајезиком, ми стално користимо везнике *и*, *или*, *ако* и *не* у метајезику. У почетку их разумемо како их разумемо, а онда временом почињемо да их разумевамо двовредносно истиносно-функцијски. Импликација метајезика није можда одмах била материјална, али после видимо да она може да се тако схвати, да је најбоље да се тако схвати, и користимо је као материјалну импликацију. То није баш формализација метајезика, али се иде у том правцу. Као да је припремљен терен за њу.

Поставља се најзад питање да ли може да се превазиђе двојство између објект-језика и метајезика, тако да буде само један језик и да тај буде формалан. Да ли је то могуће бар за математику? Крајем XIX и почетком XX века логичари су се томе надали, а онда су од тога одустали и своју делатност обављају махом не у формалном него у природном језику, као и други математичари. Као да је тај мање прецизан, мање дисциплинован, мање уштогљен језик, бољи за живот, бољи за људе, и на крају крајева разумнији. С тим што је за логичаре тај природни математички језик често метајезик једног формалног објект језика, који они изучавају, који им помаже да разумеју, али којим ретко говоре. А рачунање на таквим језицима препуштено је машинама и рачунарству.

Филозоф Витгенштајн (Ludwig Wittgenstein) је у свом главном делу, *Филозофским истраживањима* (§ 18), приметио да природни језик „можемо да посматрамо као неки стари град: лавиринт уличица и тргова, старих и нових кућа, и кућа дограђиваних у разним епохама, а све то опкољено мноштвом нових предграђа, са правим и правилним улицама и једнообразним кућама“. Математички природни језик је једно од тих предграђа, заједно са хемијским природним језиком, који Витгенштајн исто спомиње, а формални језици нису чак ни предграђа. То су можда макете на архитектонском факултету, или идеална, апстрактна, теоријска насеља.

1.9. Дрво потформула

Главни везник неке исказне формуле је онај симбол за везник који је последњи уведен приликом њеног индуктивног грађења. Симбол за конјункцију $\wedge$ је нпр. главни везник исказне формуле $(p \vee q) \wedge (\neg (\neg q \vee \bot) \vee r)$, коју смо у одељку 1.7 имали за пример. Исказна слова су исказне формуле које немају везника, па ни главног.

Потформуле неке формуле су њени делови који су и сами формуле, при чему се сматра да је и свака формула потформула саме себе. Она је исто део формуле, мада не *прави* део; она је исто потформула саме себе, мада не *права* потформула. Све то се каже за исказне као и за друге формуле. У нашем списку од 10 исказних формула које смо дали за пример у одељку 1.7 имамо све потформуле исказне формуле $(p \vee q) \wedge (\neg (\neg q \vee \bot) \vee r)$, с тим што се q јавља двапут као потформула те исказне формуле. Потформуле неке исказне формуле су исказне формуле саграђене успут приликом индуктивног грађења наше исказне формуле.

Потформуле неке исказне формуле су природно уређене у једну структуру која је као *дрво* – рачва се само на једну страну. Места једног дрвета где ће код нас да стоје потформуле зову се *чворовима*. Сваки чвор има нула или једног непосредног претходника, а непосредних наследника може да има нула, један, или више.

Када чвор нема претходника зваће се *корен*, а када нема наследника зваће се *лист*. Корен ће бити само један, и од њега до сваког другог чвора у дрвету моћи ће да се стигне прелазећи са чвора на чвор који му је непосредан наследник; тј. сви други чворови, ако их има, биће наследници корена. Кажемо „ако их има“ јер дрво може да буде и закржљало, и да има један једини чвор, који је у исто време и корен и лист.

На слици дрвета доле, чвор обележен са $p \vee q$ има као непосредног претходника чвор обележен са $(p \vee q) \wedge (\neg (\neg q \vee \bot) \vee r)$, који је корен дрвета. Као непосредне наследнике наш чвор обележен са $p \vee q$ има чвор обележен са p и левљи од чворова обележених са q; та два непосредна наследника су листови.

Код *дрвета потформула* једне исказне формуле, у корену имамо саму нашу исказну формулу. Атомска исказна формула има закржљало дрво потформула са само једним чвором, који је и корен и лист; у том чвору је та атомска формула. Ако је та исказна формула сложена, нпр. $(p \vee q) \wedge (\neg (\neg q \vee \bot) \vee r)$, онда у непосредним наследницима корена налазимо највеће праве потформуле те исказне формуле; у нашем примеру то су конјункти $p \vee q$ и $\neg (\neg q \vee \bot) \vee r$. Свака од тих потформула ако је сложена и сама ће да има наследнике са својим потформулама, итд., све док не стигнемо до листова, где се налазе атомске потформуле, тј. потформуле које су атомске исказне формуле. Дрво потформула исказне формуле коју смо узели за пример имамо на следећој слици:

```
                      q
                      |
                     ¬q          ⊥
                       \        /
                        ¬q ∨ ⊥
                           |
p          q            ¬(¬q ∨ ⊥)         r
 \        /                  \           /
  p ∨ q                       ¬(¬q ∨ ⊥) ∨ r
     \                         /
      (p ∨ q) ∧ (¬(¬q ∨ ⊥) ∨ r)
```

У дрвету потформула неке исказне формуле забележена је историја грађења те исказне формуле преко индуктивне дефиниције. Исказна формула се гради почевши горе од листова па надоле према корену.

У дрвету потформула неке исказне формуле могли бисмо у сваком чвору који није лист да заменимо потформулу која је у њему главним везником те потформуле. У нашем примеру добили бисмо дрво:

```
          q
          |
          ¬      ⊥
            \   /
              ∨
              |
    p    q    ¬      r
     \  /       \   /
      ∨           ∨
        \        /
            ∧
```

Ово последње дрво могли бисмо да поистоветимо са самом исказном формулом. Формулу у том случају не би чинили симболи уређени у *низ*, него у *дрво*. Тада бисмо индуктивни корак наше индуктивне дефиниције исказне формуле другачије тумачили. Примена симбола n-арног везника γ на исказне формуле $p_1,...,p_n$ дала би као резултат дрво у чијем корену је γ, а изнад којег су n дрвета формула $p_1,...,p_n$ тако да су непосредни наследници новог корена са γ корени тих n дрвета.

Наше формуле које су низови симбола, било у нотацији са уметањем и заградама било у пољској нотацији, настале би претварањем формула које су дрвета у низове тако да се структура тих дрвета не заборави. Морамо бити у стању да је реконструишемо, и то изражавамо тако што кажемо да је записом у низу дрво *кодирано*. То кодирање се прави јер има нешто што тражи да се језик састоји од једнодимензионалних низова, мада његову дубљу структуру, која не сме да се занемари, чине дводимензионална дрвета.

Једнодимензионално кодирање могли би да траже и говор и писање. Говор се одвија пре свега у једној димензији, димензији времена, у којем се гласови нижу. Писање следи говор, али једнодимензионално писање, а посебно штампање, иначе је изгледа најпрактичније. И у говору и у писању тек помало се помаља неки пут и друга димензија. Подвучемо, на пример, нешто изговорено неким гестом или нешто написано цртом.

Занимљиво је видети како се формула која је дрво кодира у пољској нотацији – са уметањем и заградама то је лакше видети. Замислимо, сликовито, да то дрво, као што је дрво на последњој слици, треба да обиђе једна веверица (на пољском *wiewiórka*), полазећи код корена, и путујући у равни около дрвета у смеру казаљке на сату. Она бележи све што види у сваком чвору успут, само што када се врати у неки чвор, пошто је већ забележила шта је у њему, то не пише поново. У нашем примеру, исказна формула у пољској нотацији коју веверица добија као резултат тог обиласка је $\wedge \vee pq \vee \neg \vee \neg q \bot r$.

1.10. Семантика исказне логике

Термини *синтакса* и *семантика*, преузети из лингвистике, односе се, први, на језичка истраживања која се не баве значењем, а, други, на језичка истраживања која се баве значењем. У логици се ти термини односе пре свега на формалне језике и значење које је за њих везано, с тим што се синтаксом назива и бављење формалним дедукцијама.

У одељку 1.7 и прошлом одељку 1.9 имамо синтаксу формалног језика исказне логике. Значење тог језика, значење симбола за везнике, није нас ту интересовало, и ништа што смо ту рекли не зависи од тог значења. Рекли смо да смо исказну формулу $(p \vee q) \wedge (\neg (\neg q \vee \bot) \vee r)$ могли да схватимо као алгебарски израз $(p + q) \cdot (-(-q + 0) + r)$, а не као нешто што се тиче конјункције, дисјункције, негације и апсурда. Нешто од значења носи ваљда и синтакса, и онолико од значења колико је везано за бинарност везника конјункције добијамо у синтакси. Али у синтакси се до сада чак није видело ни да се ради о везнику. Уместо да симбол $\wedge$ схватимо као везник конјункције могли смо да га схватимо као операцију множења.

Тешко је и претешко рећи шта је *значење*, и око тога како га треба описати и разјаснити, како се њиме научно бавити, нема сагласности ни у лингвистици ни у филозофији. Ради се изгледа о речи која покрива различите ствари, и коју не треба схватати увек подједнако.

Логика замишља значење на свој начин. По њој, с једне стране имамо језик, његове формуле. С друге стране имамо свет који тај језик описује. Описати значење језика, растумачити, интерпретирати језик, састоји се у приписивању ствари у свету језичким изразима. У језику су као неке етикете, у свету неке ствари, и треба рећи која се етикета лепи за коју ствар. Претпоставља се још да језик и свет имају паралелну структуру, да су и један и други склопљени на исти начин. (То постаје веома сумњиво када се претпостави и за природни језик, а можда је иначе сумњиво.)

Значење се у логици јавља у вези са две употребе језика, тврђењем и именовањем (в. одељак 1.1), а када је реч о исказној логици то је само тврђење. Друге су употребе занемарене у логици, а занемарене су и у великом делу двадесетовековне филозофије језика, на коју је логика веома утицала.

У семантици исказне логике, тј. семантици формалног језика исказне логике, имамо с једне стране тај језик, а с друге стране један веома поједностављен свет. У том свету су само две ствари. То су истиносне вредности *истина* и *лаж*, које смо решили да означавамо са 1 и 0.

Како се интерпретира формални језик исказне логике у свету двеју истинос-них вредности? Једно исказно слово, будући да је променљива, и да уз њега иде супституција, замишљамо да стоји место било ког исказа. Према томе том слову можемо неки пут да припишемо истиносну вредност 1, а неки други пут истиносну вредност 0. У једној интерпретацији биће истинит исказ, а у некој другој лажан исказ. Када припишемо истиносне вредности 1 или 0 исказним словима – сваком слову или једну или другу, никако обе – онда ћемо да нађемо истиносне вредности других исказних формула по истиносним таблицама. Свакој исказној формули биће приписана тачно једна истиносна вредност. Ако је исказном слову p приписана истиносна вредност 1, а исказном слову q истиносна вредност 0, онда имамо нпр.

$$\begin{array}{ccccccc} (p & \to & q) & \wedge & (q & \to & p) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

тј. исказној формули $(p \to q) \wedge (q \to p)$ је приписано 0.

Једно такво приписивање истиносних вредности исказним словима, на осно-ву којег као што рекосмо приписујемо тачно једну истиносну вредност свакој исказној формули, зове се *валуација*. Математичким језиком речено, валуација је функција, или пресликавање, из скупа исказних формула у скуп истиносних вредности. (Појмом функције, једном од главних математичких појмова, бавићемо се у одељку 2.12.) Да би валуација била таква функција битно је да се *свакој* исказ-ној формули припише *тачно једна* истиносна вредност. Када нека валуција некој исказној формули припише неку истиносну вредност говорићемо још да та исказна формула *има* ту истиносну вредност за ту валуацију.

Једна валуција је једна могућа интерпретација формалног језика исказне логике у свету двеју истиносних вредности. Тај свет не чине само те две истиносне вредности него и операције на њима дате истиносним таблицама. То је једна алге-барска структура која се зове *двочлана Булова алгебра* (шта овде тачно значи *алгеб-ра* биће речено у одељку 2.12). У тој алгебарској структури може се узети да је 1 је-дан једночлани скуп, скуп са само једним чланом, а 0 празан скуп. Истиносна таблица за конјункцију одговара онда операцији пресека на тим скуповима, исти-носна таблица за дисјункцију одговара унији, а истиносна таблица за негацију ком-плементу у односу на наш једночлани скуп. (У пресеку два скупа је све оно што је у једном *и* у другом, у унији је све оно што је у једном *или* у другом, а у комплементу подскупа неког скупа – скупа у односу на који узимамо комплемент – је све оно из скупа што *није* у подскупу.)

Питање је да ли смо овим објаснили значење везника који нас занимају. Да ли неко ко не зна шта значи везник *и* може то да научи преко валуација и истиносне таблице за $\wedge$? Да ли деца или странци уче значење конјункције на начин који је добро представљен валуацијама и том истиносном таблицом? Проблем је што да бисмо објаснили како треба да се схвати та истиносна таблица ми користимо језик у којем се јавља везник *и*, или ако се не јавља баш он, онда се јавља нешто што се своди на њега, или га некако укључује. Сигурно је да је лоше рећи само „$p \wedge q$ има истиносну вредност 1 ако и само ако p има истиносну вредност 1 *и* q има истиносну вредност 1". Није много боље рећи „Конјункција има истиносну вредност 1 ако и само ако *оба* конјункта имају истиносну вредност 1". Треба да већ знамо шта значи везник *и* или реч *оба*, у чије значење је конјункција изгледа укључена, да бисмо сазнали значење везника *и*. (Јавља се ту још и везник *ако и само ако*.) Истиносне таблице су боље од оваквих еквиваленција, и оне помажу да се прецизира значење истиносно-функцијских двовредносних везника, али разумевање некаквог језика, у којем тешко да неће да буде никаквог везника, мора да се претпостави да бисмо разумели истиносне таблице.

У овој семантичкој теорији са валуацијама природни језик се спомиње тек успут, због мотивације. Валуације га прескачу и приписују истиносне вредности исказним словима директно. Природни језик међутим има своје место између формалног језика исказне логике и света двеју истиносних вредности. Место исказних формула супституцијом добијамо исказе природног језика, који су истинити или лажни. Зато што нам је дозвољено да место неког исказног слова супституишемо и истинит исказ и лажан исказ дозвољено је у валуацијама приписати том слову и 1 и 0. Та слобода у интерпретацији исказних слова је последица тога што се ради о променљивима, уз које иде супституција. Истиносне таблице не доносе само интерпретацију симбола за везнике формалног језика исказне логике, него преко супституције оне доносе и интерпретацију везника природног језика, схваћених двовредносно и истиносно-функцијски.

Друкчије ћемо гледати на значење везника ако узмемо да основна употреба језика везана за исказну логику није да се на њему тврди, него да се с њим дедукује. Значење везника *и* се онда објашњава преко следећих правила формалне дедукције:

Из p и q закључи $p \wedge q$;

Из $p \wedge q$ закључи p;

Из $p \wedge q$ закључи q.

Да бисмо разумели та правила треба да знамо шта значи закључивати и треба да знамо шта значи реч *и* која стоји између p и q у списку премиса у првом правилу. Значење тог *и* схватамо ако схватамо шта је то низ (једна дефиниција низа биће дата при крају одељка 2.2). То *и* замењује запету у низу, и оно – то је веома важно –

није везник конјункције. Тог *и*, које овде замењује запету, у говору и не мора да буде. Запета у говору може да буде просто мала пауза.

Свет двеју истиносних вредности се у овом друкчијем приступу не спомиње, мада је семантичка теорија којој он води у складу са претходном, буловском, семантичком теоријом. (Тај друкчији приступ семантици сугеришу и системи природне дедукције из одељка 1.18; о њему ћемо рећи још нешто на крају одељка 2.12.)

1.11. Таутологије

Таутологије су исказне формуле које за сваку валуацију имају истиносну вредност 1. Како год да интерпретирамо такву исказну формулу добијамо истину – никада лаж. Свака ће њена инстанца где место променљивих супституишемо исказе бити истинит исказ. Она гарантовано даје истину. За инстанце таутологија се може рећи да су логичке истине, истине исказне логике. Њихова се истинитост заснива искључиво на значењу везника, искључиво на томе како стоје ствари у свету двеју истиносних вредности. Како стоје ствари у материјалном или неком другом свету нема никакве везе.

Да бисмо испитали да ли је нека исказна формула таутологија треба да видимо коју истиносну вредност она има са свим могућим валуацијама. Ако исказних слова има бесконачно много, онда и валуација има бесконачно много, али све оне се сва срећа деле на коначно много врста с обзиром шта приписују исказним словима из исказне формуле коју испитујемо, зато што тих слова има коначно много. Ако испитујемо нпр. исказну формулу $p \vee \neg p$, у којој се јавља само исказно слово p, онда имамо две врсте валуација: оне које приписују 1 исказном слову p и оне које му приписују 0. Не тиче нас се шта те валуације приписују другим исказним словима. Онда имамо следећу истиносну таблицу:

p	$\vee$	$\neg$	p
1	1	0	1
0	1	1	0

Пошто је овде испод главног везника $\vee$ колона јединица, $p \vee \neg p$ је значи таутологија.

Логички принцип који стоји иза те таутологије је довољно важан да она добије име. Она се зове *искључење трећег*. Она тврди да је сваки исказ или истинит или није истинит. Треће могућности нема. Блиска је овој таутологији таутологија $p \rightarrow p$, чија се таутологичност утврђује истиносном таблицом исто тако лако. (Ова последња таутологија је најближа пореклу термина *таутологија*, који је на грчком састављен од *иста* и *реч*.)

Ево једног мало дужег испитивања, са два исказна слова p и q:

$$\neg\,(p \vee q) \leftrightarrow (\neg\, p \wedge \neg\, q)$$

0 1 1 1	1	0 1 0 0 1
0 1 1 0	1	0 1 0 1 0
0 0 1 1	1	1 0 0 0 1
1 0 0 0	1	1 0 1 1 0

што показује да је и та исказна формула таутологија. И та је таутологија убедљива; она каже да је дисјункција лажна ако и само ако су оба дисјункта лажна.

Ево једног још дужег испитивања, са три исказна слова p, q и r:

$$((p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r))$$

1 1 1 1 1	1	1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 0 0	1	1 0 0 0 1 0 0
1 1 0 1 1	1	1 1 1 1 0 1 1
1 1 0 0 0	1	1 0 0 0 0 1 0
0 1 1 1 1	1	0 1 1 1 1 1 1
0 1 1 0 0	1	0 1 0 0 1 0 0
0 0 0 1 1	1	0 1 1 1 0 1 1
0 0 0 1 0	1	0 1 0 1 0 1 0

што показује да је и ова исказна формула таутологија. Та таутологија каже да дисјункција имплицира нешто ако и само ако оба дисјункта то имплицирају.

За $n \geq 0$, са n исказних слова у исказној формули коју испитујемо имамо 2^n врста валуација и исто толика редова у таблици. Као што показују наши примери, са једним исказним словом имамо их 2^1, што је једнако 2, са два исказна слова 2^2, што је једнако 4, а са три исказна слова 2^3, што је једнако 8. Са 0 исказних слова имамо их 2^0, што је једнако 1; у том случају нас уопште не занима шта валуације приписују исказним словима, јер без обзира на валуацију атомска исказна формула $\top$ има истиносну вредност 1, а атомска исказна формула $\bot$ има истиносну вредност 0. Исказна формула $\top$ је значи таутологија.

Функција 2^n, чији аргумент n је у експоненту, брзо расте (в. одељак 1.6). Са 64 исказна слова, што није тако много – у једном реду штампаног текста има више од 60 словних места – имаћемо у нашој истиносној таблици за испитивање таутологичности више од 18 милијарди милијарди редова. Проблем испитивања таутологичности је одлучив (в. одељак 0.3), али је сложен, јер због експоненцијално брзог раста тражи пуно простора или времена за решавање задатка.

Постоје практичнији поступци од истиносних таблица за испитивање да ли је нека исказна формула таутологија. (Један такав практичнији поступак приказаћемо у одељку 1.13.) У истиносним таблицама има пуно непотребног понављања, и ту може да се штеди. У последњој истиносној таблици горе, са 8 редова, у сва четири реда где r има истиносну вредност 1 обе стране еквиваленције имају истиносну вредност 1, без обзира на истиносну вредност за p и q. Та четири реда могу значи да се сведу на један. Када пак p има истиносну вредност 0, обе стране еквиваленције имају исту истиносну вредност као $q \rightarrow r$, па и ту може да се штеди – да се четири реда замене једним.

Без обзира на та скраћивања, није искључено, с обзиром на оно што се данас зна, да је проблем испитивања таутологичности нужно сложен, јер код њега не би могао да се избегне експоненцијално брзи раст. Ради се о једном од великих отворених проблема у математици, из области теоријског рачунарства, који се зове P = NP.

Када у некој таутологији место неког исказног слова супституишемо било коју исказну формулу, тј. сва јављања тог слова заменимо истом исказном формулом, добијена супституциона инстанца биће опет таутологија. Зато нам је кад је реч о таутологијама свеједно да ли у нашим исказним формулама сматрамо да су слова као p, q и r исказна слова или произвољне исказне формуле.

Нису све исказне формуле таутологије. Ниједно исказно слово нпр. није таутологија, јер има валуација које му приписују истиносну вредност 0. Није таутологија нпр. ни $p \wedge q$, као што показује истиносна таблица у одељку 1.4. Овде имамо примере исказних формула које за неке валуације имају истиносну вредност 1, а за неке друге истиносну вредност 0. Осим таутологија и таквих исказних формула имамо још једну значајну врсту исказних формула.

Исказне формуле које за сваку валуацију имају истиносну вредност 0 зову се *контрадикције*. Као инстанце контрадикција добијамо исказе које можемо назвати опет контрадикцијама, или пак противречностима. Гарантовано лажни искази. Док су инстанце таутологија логичке истине, истине које се заснивају искључиво на значењу везника, инстанце контрадикција су неистине које се заснивају искључиво на том значењу.

Да бисмо испитали да ли је нешто контрадикција можемо да правимо истиносне таблице, као за испитивање таутологичности, с тим што нас интересује да ли је испод главног везника колона нула, а не колона јединица. Контрадикција је исказна формула $\perp$, затим $p \wedge \neg p$, затим негација сваке таутологије. С друге стране, негација сваке контрадикције је таутологија.

С математичке тачке гледишта, таутологије немају првенство у односу на контрадикције. Акценат је могао да буде стављен на ове друге, и логичка испитивања да се вежу првенствено за њих. Разлози што у логици таутологије имају првенство нису строго математички. У свету двеју истиносних вредности истина није важнија од лажи, и једно је верна слика другог.

Да ли је тако у обичном животу и свету где се њим живи? И тамо је истина једна, али лаж као да није једна, него многострука.

1.12. Замена еквивалената

Када је нека еквиваленција таутологија каже се да су исказне формуле са њене две стране *еквивалентне*. Каже се још и да су те две формуле *еквиваленти*. Примера еквивалентних исказних формула имамо два у прошлом одељку 1.11. Тамо смо проверили да је $\neg(p \vee q)$ еквивалентно са $\neg p \wedge \neg q$ и да је $(p \vee q) \rightarrow r$ еквивалентно са $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$. Других примера еквивалентних исказних формула било је и раније. Еквивалентне исказне формуле имају исту истиносну вредност за сваку валуацију. То смо у ранијим одељцима мање прецизно изражавали рекавши да искази облика тих исказних формула имају *увек* исту истиносну вредност. Пуно других примера еквивалентних исказних формула може да се нађе у одељку 1.14. У следећем тврђењу под речју *формула* подразумевамо да се ради о исказним формулама.

Тврђење о замени еквивалената. Ако су две формуле еквивалентне, онда у свакој формули једна може да се замени другом тако да та формула и резултат замене буду еквивалентни.

Овде, у општем случају, имамо четири формуле: две формуле које су еквивалентне – назовимо их A и B –, затим трећу формулу – назовимо је C – у којој намеравамо да заменимо потформулу A формулом B, и најзад четврту формулу – назовимо је C' – која се добија када нека – не обавезно сва, али могу да буду и сва – јављања формуле A у формули C заменимо формулом B. Кажемо да је C' добијено из *C заменом еквивалената*. (Замена овде није супституција – в. одељак 1.7 – тако да не морамо да заменимо *сва* јављања A као потформуле од C.) Тврђење о замени еквивалената каже да ако су формуле A и B еквивалентне, онда су и формуле C и C' еквивалентне.

Нека нпр. A буде p, нека B буде $\neg\neg p$, нека C буде $(p \rightarrow q) \rightarrow p$, и нека C' буде $(\neg\neg p \rightarrow q) \rightarrow p$. Из тврђења о замени еквивалената закључујемо да ако је p еквивалентно са $\neg\neg p$, онда је $(p \rightarrow q) \rightarrow p$ еквивалентно са $(\neg\neg p \rightarrow q) \rightarrow p$. Лако је проверити да је p заиста еквивалентно са $\neg\neg p$, па су према томе, по модус поненсу, исказне формуле $(p \rightarrow q) \rightarrow p$ и $(\neg\neg p \rightarrow q) \rightarrow p$ заиста еквивалентне. Из овог примера правимо један други тако што узмемо да је C' исказна формула $(\neg\neg p \to q) \to \neg\neg p$, а све друго се не мења.

Еквиваленција између p и $\neg\neg p$, која се спомиње у прошлом пасусу, довољно је важна да има име. Та таутологија се зове:

закон двоструке негације: $p \leftrightarrow \neg\neg p$.

Реч *тврђење* код тврђења о замени еквивалената не користимо у истом смислу као када смо раније говорили о употреби језика која се састоји у тврђењу (в. одељак 1.1). Тврђење овде значи *важан исказ*. Такви се искази у математици зову теоремама, али теореме обично треба да буду искази још важнији од тврђења као што је ово да би заслужили ту титулу. И теореме треба да буду формулисане још прецизније и концизније. То тражи више симбола, што ми овде избегавамо.

И тврђења и теореме овде су искази метајезика. Касније, у формалним системима (в. одељке 1.17 и 2.11), теореме ће да буду формуле објект-језика.

Доказ тврђења о замени еквивалената за исказне формуле заснива се на истиносној функционалности. По истиносној функционалности, свеједно је за израчунавање истиносне вредности са којом смо од двеју еквивалентних исказних формула имали посла. Важна је само истиносна вредност, а она се код еквивалентних исказних формула не разликује. Тврђење о замени еквивалената се прецизно доказује математичком индукцијом, која прати индуктивну дефиницију исказних формула. Овде се ради о индукцији по сложености формуле C поменуте горе. Математичком индукцијом се иначе доказују слична тврђења која нешто тврде о свим формулама. Тврђење о замени еквивалената требало би међутим да делује довољно уверљиво и без тог доказа.

Тврђење о замени еквивалената нам каже да се еквивалентне формуле, мада нису једнаке, понашају исто ако нас занима само истиносна вредност, и ако је контекст у којем су се нашле истиносно-функцијски. Пошто увек имају исту истиносну вредност, оне на исти начин утичу на истиносну вредност контекста.

1.13. Чишћење

Са истиносним таблицама добили смо у одељку 1.11 поступак којим можемо да испитамо да ли је нека исказна формула таутологија. У овом одељку приказаћемо за то један практичнији поступак, који ћемо звати *чишћењем*. Кога практична, рачунска, страна логике не интересује може међутим да прескочи овај одељак и настави читање без последица за разумевање даљег текста. Једино провере да ли је нешто таутологија, ако жели тиме да се бави, могу касније да му буду мало теже.

У најгрубљим цртама, чишћење се састоји у супституцији нуларних везника $\top$ и $\bot$ место исказних променљивих, и после тога преласку на краће еквивалентне исказне формуле са мање променљивих. Исказне променљиве уклањамо тако једну по једну, док не „почистимо“ све. Исказне формуле без променљивих су еквивалентне са $\top$ или са $\bot$. Исказна формула коју испитујемо биће таутологија ако и само ако су све исказне формуле које смо на крају добили еквивалентне са $\top$. Поступак ћемо детаљније приказати доле.

У принципу имаћемо и са чишћењем експоненцијално брзи раст простора или времена потребног за решавање задатка. Али ако се паметно користи, за већину исказних формула које имамо у овој књизи, у којима нема више од три исказна слова, чишћење може да се ради у глави, без писања, и сигурно је практичније од прављења истиносних таблица.

За чишћење треба прво да се научи напамет, као таблица множења, један списак таутологија, који ћемо сада да дамо. Веома је лако проверити помоћу истиносних таблица да су таутологије све еквиваленције следећих облика, где је A произвољна исказна формула:

$$
\begin{array}{lllll}
(A\wedge\top)\leftrightarrow A, & (A\vee\top)\leftrightarrow\top, & (A\to\top)\leftrightarrow\top, & (A\leftrightarrow\top)\leftrightarrow A, & \neg\top\leftrightarrow\bot,\\
(\top\wedge A)\leftrightarrow A, & (\top\vee A)\leftrightarrow\top, & (\top\to A)\leftrightarrow A, & (\top\leftrightarrow A)\leftrightarrow A, & \neg\bot\leftrightarrow\top.\\
(A\wedge\bot)\leftrightarrow\bot, & (A\vee\bot)\leftrightarrow A, & (A\to\bot)\leftrightarrow\neg A, & (A\leftrightarrow\bot)\leftrightarrow\neg A, & \\
(\bot\wedge A)\leftrightarrow\bot, & (\bot\vee A)\leftrightarrow A, & (\bot\to A)\leftrightarrow\top, & (\bot\leftrightarrow A)\leftrightarrow\neg A, &
\end{array}
$$

Чишћење се спроводи овако. У исказној формули коју испитујемо, нпр. $((p\to q)\to p)\to p$, супституишемо прво $\top$ место произвољног исказног слова. Нека то буде слово q у нашој исказној формули, и резултат супституције је према томе $((p\to\top)\to p)\to p$. Онда на основу еквиваленције $(A\to\top)\leftrightarrow\top$ са нашег списка, која важи и када је A исказна формула p, заменом еквивалената добијамо краћу исказну формулу $(\top\to p)\to p$. Затим на основу еквиваленције $(\top\to A)\leftrightarrow A$ са нашег списка, заменом еквивалената добијамо још краћу исказну формулу $p\to p$.

Сада супституишемо $\top$ место p у $p\to p$. Добијамо $\top\to\top$, па на основу $(A\to\top)\leftrightarrow\top$ или $(\top\to A)\leftrightarrow A$, заменом еквивалената стижемо до $\top$. Када супституишемо $\bot$ место p у $p\to p$ добијамо $\bot\to\bot$, па на основу $(A\to\bot)\leftrightarrow\neg A$ и $\neg\bot\leftrightarrow\top$, или пак само $(\bot\to A)\leftrightarrow\top$, што је брже, заменом еквивалената стижемо до $\top$.

Остаје још да се супституише $\bot$ место q у почетној исказној формули $((p\to q)\to p)\to p$. Резултат је $((p\to\bot)\to p)\to p$, одакле на основу еквиваленције $(A\to\bot)\leftrightarrow\neg A$, добијамо $(\neg p\to p)\to p$. Када супституишемо $\top$ место p добијамо

$(\neg\top \to \top) \to \top$, одакле на основу еквиваленције $(A \to \top) \leftrightarrow \top$ стижемо до $\top$. Када супституишемо $\bot$ место p добијамо $(\neg\bot \to \bot) \to \bot$, одакле са две примене еквиваленције $(A \to \bot) \leftrightarrow \neg A$ добијамо $\neg\neg\neg\bot$. На основу еквиваленција $\neg\bot \leftrightarrow \top$ и $\neg\top \leftrightarrow \bot$ на крају стижемо до $\top$. С тим је чишћење исказне формуле $((p \to q) \to p) \to p$ завршено.

Тај поступак води прављењу једног дрвета чији су чворови исказне формуле. У том дрвету добијамо рачвања на две стране кад год место неког исказног слова супституишемо $\top$ с једне стране и $\bot$ са друге. То дрво расте без рачвања када заменом еквивалената прелазимо на краће исказне формуле. Кад год више нема места за нове супституције нуларних везника $\top$ и $\bot$ место исказних слова, и ниједна од наших еквиваленција са списка не води даљем скраћивању, стиже се на листовима нашег дрвета до $\top$ или до $\bot$.

Чистећи исказну формулу $((p \to q) \to p) \to p$ увек смо стигли до $\top$. Онда закључујемо да је $((p \to q) \to p) \to p$ таутологија. Да смо икада на неком листу стигли до $\bot$ закључили бисмо да није таутологија. (Да смо увек на листовима стигли до $\bot$ закључили бисмо да је контрадикција.)

Нека $A^p{}_\top$ буде инстанца исказне формуле A добијена супституцијом $\top$ место исказног слова p, а нека $A^p{}_\bot$ буде инстанца од A добијена супституцијом $\bot$ место p. Може да се утврди да је A таутологија ако и само ако су таутологије $A^p{}_\top$ и $A^p{}_\bot$. Да је чишћење исправан поступак за испитивање таутологичности гарантују то тврђење и тврђење о замени еквивалената из прошлог одељка 1.12.

Сада ћемо поново да испитамо чишћењем да ли је $((p \to q) \to p) \to p$ таутологија. Овог пута међутим радићемо паметније и брже. Погрешили смо малопре што смо супституисали $\top$ и $\bot$ прво место q па онда место p. Добра политика је често да се почне са супституцијом место исказног слова које се чешће јавља; то води већим скраћењима преко еквивалената. У исказним формулама где је једини везник импликација паметно је такође кренути од супституције место првог исказног слова здесна.

Супституишимо зато прво $\top$ место p. Одмах, на основу $(A \to \top) \leftrightarrow \top$, стижемо до $\top$. Супституишимо затим $\bot$ место p. Онда имамо $((\bot \to q) \to \bot) \to \bot$, што на основу $(\bot \to A) \leftrightarrow \top$ и $(A \to \bot) \leftrightarrow \neg A$ даје $\neg\neg\top$, па уз $\neg\top \leftrightarrow \bot$ и $\neg\bot \leftrightarrow \top$ стижемо до $\top$. Цело чишћење у овом пасусу, са мало искуства, може да се изведе у глави, без писања.

Упутства која воде краћем чишћењу, као она која смо дали у претпоследњем пасусу, зависе од врсте исказне формуле. Вежбом и временом стиче се осећај за њих.

За исказну формулу $((p \to q) \to p) \to p$ није јасно пре испитивања да даје логичке истине. Та таутологија се иначе зове *Персов закон*, по деветнаестовековном логичару и филозофу Персу (Charles Sanders Peirce).

1.14. Дуалност између конјункције и дисјункције

Сада ћемо да наведемо неке важне таутологије које су еквиваленције. Оне се често зову законима. Тако смо већ назвали закон двоструке негације (в. одељак 1.12) и Персов закон. То је помало старински термин, који сугерише да логика као свака наука има своје законе. Сем тога, реч *закон* може згодно неки пут да покрије и таутологију и правило дедукције везано за њу. За таутологију која је импликација везано је правило дедукције које каже да се са антецеденса као премисе може да пређе на консеквенс као закључак. Прелазак са таутологије на то правило оправдава се модус поненсом. За таутологије које су еквиваленције везана су два правила дедукције. С обзиром да еквиваленција може да се замени конјункцијом две импликације (в. одељке 1.5 и 1.15), та правила дедукције се исто оправдавају модус поненсом. Једно од тих правила дедукције каже да се са исказне формуле лево од еквиваленције као премисе може да пређе на исказну формулу десно као закључак, а друго каже да се може учинити обрнуто, са формуле десно може да се пређе на формулу лево. Разлика између таутологија и правила дедукције није увек била, и није код свих логичара, тако јасна.

Ево нашег списка, са именима тих таутологија, када их имају:

асоцијативност:	$((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$,	$((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$,
комутативност:	$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$,	$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$,
идемпотентност:	$(p \wedge p) \leftrightarrow p$,	$(p \vee p) \leftrightarrow p$,
јединични закони:	$(p \wedge \top) \leftrightarrow p$,	$(p \vee \bot) \leftrightarrow p$,
апсорпција:	$(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$,	$(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p$,
дистрибутивност:	$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$,	$(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$,
	$(p \wedge \bot) \leftrightarrow \bot$,	$(p \vee \top) \leftrightarrow \top$,
Де Морганови закони:	$\neg (p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$,	$\neg (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$,
	$\neg \top \leftrightarrow \bot$,	$\neg \bot \leftrightarrow \top$.

Де Морган (Augustus De Morgan) је деветнаестовековни логичар. За десни Де Морганов закон смо проверили у одељку 1.11 да је таутологија. (Јединични закони и еквиваленције у последњем реду и трећем реду одоздо налазе се и у прошлом одељку 1.13.)

Када у асоцијативности, комутативности и јединичним законима заменимо свуда $\wedge$ симболом $\cdot$, а $\vee$ симболом $+$, још заменимо свуда $\top$ симболом 1, а $\bot$ симболом 0, и на крају заменимо свуда $\leftrightarrow$ симболом $=$, добијамо законе који важе за природне бројеве, множење, сабирање, јединицу и нулу. Важе они и за друге бројеве. Такви закони су били инспирисали Була да логику схвати као једну посебну алгебру. Идемпотентност и апсорпција не важе за природне бројеве после наше замене. С том заменом важи лева дистрибутивност – дистрибутивност конјункције над дисјункцијом – тј. множење се дистрибуира над сабирањем, и $p \cdot 0 = 0$, али не важи десна дистрибутивност – дистрибутивност дисјункције над конјункцијом – тј. сабирање се не дистрибуира над множењем, и немамо $p + 1 = 1$. Негација се понаша као минус у закону двоструке негације, али не у Де Моргановим законима и еквиваленцијама које смо ставили испод њих.

Са еквиваленција у овом списку које се налазе лево прелазимо на оне десно тако што заменимо свуда $\wedge$ симболом $\vee$, а $\vee$ симболом $\wedge$, тј. међусобно се свуда замене $\wedge$ и $\vee$, и још се међусобно свуда замене $\top$ и $\bot$. На исти начин дабоме прелазимо са еквиваленција десно на оне лево. Овде се ради о еквиваленцијама између исказних формула са везницима $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\top$ и $\bot$, и може да се докаже да се увек са једне такве еквиваленције која је таутологија заменом коју смо описали прелази на еквиваленцију која је таутологија. Та особина класичне исказне логике зове се *дуалност између конјункције и дисјункције*.

Тврђење да важи та дуалност доказује се математичком индукцијом, као што се иначе доказују слична тврђења која нешто тврде о свим формулама. Нећемо међутим детаљно да се бавимо тим доказом, него ћемо само, за математички спретнијег читаоца, да наговестимо како он изгледа. Ко не жели да се упушта у тај доказ може слободно да прескочи текст који следи све до знака $\dashv$ којим је обележен крај скице доказа дуалности.

Нека су A и B две исказне формуле у којима могу да се јаве само везници $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\top$ и $\bot$, и нека је A' добијено из A, а B' из B, тако што се свуда, као горе, међусобно замене $\wedge$ и $\vee$, и свуда се међусобно замене $\top$ и $\bot$. Тврђење које нас интересује је следеће.

Дуалност између конјункције и дисјункције. Ако је $A \leftrightarrow B$ таутологија, онда је $A' \leftrightarrow B'$ таутологија.

Доказ. Ако је $A \leftrightarrow B$ таутологија, онда је и $\neg A \leftrightarrow \neg B$ таутологија. Затим се коришћењем Де Моргановых закона може да докаже да је таутологија и еквиваленција $A'' \leftrightarrow B''$ која се добија из $A' \leftrightarrow B'$ стављањем негације испред свих атомских исказних формула. Онда је таутологија и еквиваленција $A''' \leftrightarrow B'''$ која се добија из $A'' \leftrightarrow B''$ супституцијом $\neg p$ место свих исказних слова p. Најзад, уз тврђење о замени еквивалената, уз закон двоструке негације и уз таутологије са $\neg$, $\top$ и $\bot$ које су горе наведене одмах испод Де Моргановых закона, закључујемо да је $A' \leftrightarrow B'$ таутологија. ⊣

Нуларни везник $\top$ можемо да замишљамо као нулти, гранични, случај конјункције, а $\bot$ као нулти случај дисјункције. У то нас уверавају јединични закони и еквиваленције испод дистрибутивности и испод Де Моргановых закона.

Због дуалности, ако ни због чега другог, треба прећи са искључујуће дисјункције на неискључујућу. (То смо наговестили на крају одељка 1.4.)

Дуалност којом смо се бавили у овом одељку је везана за феномен који смо споменули на крају одељка 1.11. У свету двеју истиносних вредности истина и лаж су верне слике једна друге. Другим речима, двочлана Булова алгебра (в. одељак 1.10) окренута наопако изгледа исто.

1.15. Везе између везника и функционална потпуност

Дефинисати један везник преко неких других значи показати да за формуле у којима се он јавља постоје еквивалентне формуле у којима се место њега јављају ти други везници, и то на посебан начин. Дефинисани везник је као скраћеница за један одређени склоп везника помоћу којих је дефинисан. Ово приближно одређење дефинисања везника постаће јасније касније у овом одељку, где ћемо да покажемо како једни везници могу да се дефинишу преко других, и које везнике можемо да узмемо за основне, преко којих ће сви други да буду дефинисани.

На следећем списку су таутологије на основу којих је нека исказна формула са само једним везником еквивалентна некој другој исказној формули без тог везника:

$$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q),$$
$$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q),$$

$$(p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q),$$
$$(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow q),$$
$$(p \vee q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q),$$

$(p \to q) \leftrightarrow \neg (p \wedge \neg q)$,
$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$,

$\neg p \leftrightarrow (p \to \bot)$,

$\top \leftrightarrow \neg (p \wedge \neg p)$, $\quad\quad \bot \leftrightarrow (p \wedge \neg p)$,
$\top \leftrightarrow (p \vee \neg p)$, $\quad\quad \bot \leftrightarrow \neg (p \vee \neg p)$
$\top \leftrightarrow (p \to p)$, $\quad\quad \bot \leftrightarrow \neg (p \to p)$

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$.

Таутологија $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg (\neg p \vee \neg q)$ је сродна Де Моргановом закону $\neg (p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$. Из тог закона, заменом еквивалената добијамо да је таутологија и $\neg \neg (p \wedge q) \leftrightarrow \neg (\neg p \vee \neg q)$, а онда опет заменом еквивалената уз закон двоструке негације добијамо да је $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg (\neg p \vee \neg q)$ таутологија. На исти начин дуална таутологија $(p \vee q) \leftrightarrow \neg (\neg p \wedge \neg q)$ је сродна другом Де Моргановом закону $\neg (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.

Таутологије на нашем списку говоре о могућности да се неки везници избаце из нашег језика а да се при томе ништа не изгуби. Исказне формуле са тим везницима су еквивалентне неким другим исказним формулама у којима се ти везници не јављају. То закључујемо позивајући се на тврђење о замени еквивалената (в. одељак 1.12).

Избачени везници онда могу да се сматрају скраћеницама; формуле са њима биле би скраћенице за неке друге исказне формуле без њих. На основу прве таутологије на нашој листи, исказна формула облика $p \wedge q$ била би скраћеница за $\neg (\neg p \vee \neg q)$. Кажемо у том случају да је конјункција *дефинисана* преко дисјункције и негације. На основу друге таутологије, можемо да тврдимо да конјункција може да се дефинише преко импликације и негације, итд.

Све заједно, добијамо да се сви истиносно-функцијски везници које смо узели у обзир могу да дефинишу или преко конјункције и негације, или преко дисјункције и негације, или преко импликације и негације, или преко импликације и нуларног везника апсурда. То покрива и све бинарне истиносно-функцијске везнике разматране у одељку 1.6; сви они могу да се дефинишу преко једног од тих парова везника које смо навели.

Нека $p \uparrow q$ буде скраћеница за $\neg (p \wedge q)$, а $p \downarrow q$ скраћеница за $\neg (p \vee q)$. Први од тих бинарних везника зове се *Шеферов*, а други, који може да се чита *ни* __ *ни* __, и који смо споменули у одељку 1.6, зове се *Персова стрела* (по Персу чије име носи и Персов закон; в. одељак 1.13). Један од Де Морганових закона каже да је $\neg(p \vee q)$ еквивалентно са $\neg p \wedge \neg q$.

Следеће еквиваленције су таутологије:

$$\neg p \leftrightarrow (p \uparrow p), \qquad \neg p \leftrightarrow (p \downarrow p),$$
$$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(p \uparrow q), \qquad (p \vee q) \leftrightarrow \neg(p \downarrow q),$$
$$(p \wedge q) \leftrightarrow ((p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)), \qquad (p \vee q) \leftrightarrow ((p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)).$$

Одатле можемо да закључимо да преко везника $\uparrow$ можемо да дефинишемо конјункцију и негацију, па према томе и све друге истиносно-функцијске везнике које смо узели у обзир. Исто тако, преко везника $\downarrow$ можемо да дефинишемо дисјункцију и негацију, па према томе и све друге наше истиносно-функцијске везнике. Ко би рекао да је *ни* __ *ни* __ довољно за све то!

При свему томе нисмо разматрали тернарне и друге истиносно-функцијске везнике веће арности. Да ли и све њих можемо да дефинишемо преко конјункције и негације, или преко Шеферовог везника, итд.? Одговор на ово питање је потврдан, и за скупове везника који садрже те парове везника, или само Шеферов везник, или само Персову стрелу, као и за друге, веће, скупова везника, рећи ћемо да су *функционално потпуни*. То значи да се сви истиносно-функцијски везници, свих могућих арности, могу да дефинишу преко везника из неког од тих скупова.

Функционалну потпуност нећемо детаљно да доказујемо, него ћемо само да наговестимо како изгледа један доказ за њу (један други доказ је сугерисан на крају књиге у задатку 2 за одељак 1.16). Ко не жели да се упушта у тај доказ може слободно да прескочи текст који следи све до знака ⊣ којим је обележен крај скице доказа функционалне потпуности.

Функционална потпуност. Сви истиносно-функцијски везници могу да се дефинишу преко везника из неког од горенаведених скупова.

Доказ. Тај доказ се изводи математичком индукцијом по арности n неког истиносно-функцијског везника. За базу индукције, када је $n = 0$, имамо $\top$ и $\bot$. Значи та два нуларна везника морамо бити у стању да дефинишемо са везницима из нашег скупа.

Нека је $\gamma p_1...p_n p_{n+1}$ неки $(n+1)$-арни истиносно-функцијски везник, где је $n \geq 0$ (ако је $n = 0$, онда $\gamma p_1...p_n p_{n+1}$ стоји место γp_1). За индуктивни корак претпостављамо да везници $\gamma p_1...p_n\top$ и $\gamma p_1...p_n\bot$, који су n-арни, могу да се дефинишу. Следећа еквиваленција је таутологија:

$$\gamma p_1...p_n p_{n+1} \leftrightarrow ((p_{n+1} \rightarrow \gamma p_1...p_n\top) \wedge (\neg p_{n+1} \rightarrow \gamma p_1...p_n\bot)),$$

и из ње следи да и $\gamma p_1...p_np_{n+1}$ може да се дефинише ако преко везника из нашег скупа можемо још да дефинишемо конјункцију, импликацију и негацију. Одатле математичком индукцијом следи наше тврђење. ⊣

Интересантно је да је десна страна еквиваленције наведене у том доказу исказна формула *ако* p_{n+1}, *онда* $\gamma p_1...p_n\top$; *иначе* $\gamma p_1...p_n\bot$, направљена са тернарним истиносно-функцијским везником *ако* __, *онда* __; *иначе* __, који смо споменули у одељку 1.2. Онда може да се закључи да је и скуп који се састоји од тог тернарног везника и нуларних везника $\top$ и $\bot$ исто функционално потпун.

Осим што се пуно среће у програмским језицима, тај тернарни везник имамо и у математици кад пишемо нешто као:

$$a = \begin{cases} b & \text{ако важи } p, \\ c & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тако се записује исказ *ако* p, *онда* $a = b$; *иначе* $a = c$. Неочекивано је међутим да је уз $\top$ и $\bot$ тај везник довољан за све.

На крају овог одељка можемо да закључимо да има доста слободе у нашем избору везника за формални језик исказне логике. Језик који смо ми узели као званичан није једини могући.

1.16. Дисјунктивна и конјунктивна нормална форма

Доста је тешко схватити смисао следеће исказне формуле:

$$((r \to p) \to ((q \to \neg r) \to p)) \wedge (q \to \neg ((\neg p \to \neg r) \wedge (r \to \neg q))).$$

Биће нам лакше када сазнамо да је та исказна формула еквивалентна исказној формули $(p \wedge \neg q) \vee r$. Пожељно би било када бисмо за произвољну исказну формулу, која може да буде свакаква као та наша горе, могли увек да нађемо једну такву сређену, лакше схватљиву, њој еквивалентну исказну формулу.

За ту сређену исказну формулу каже се да је у *нормалној форми*, каже се да се почетна исказна формула *своди* на ту еквивалентну исказну формулу у нормалној форми, и каже се да је та исказна формула у нормалној форми на коју се своди почетна исказна формула једна *нормална форма* почетне исказне формуле.

У овом одељку упознаћемо се са две врсте нормалних форми. Свака исказна формула имаће нормалну форму и једне и друге врсте. Те нормалне форме су значајне не само што олакшавају схватање смисла замршених формула, него зато што уз њихову помоћ могу да се добију неки значајни резултати. Једним од тих резултата бавићемо се у одељку 1.19. Други резултат би био још један поступак за испитивање таутологичности, којим нећемо да се бавимо у овој књизи. Сада ћемо да дефинишемо те нормалне форме.

Када за неки бинарни везник β формула C има потформулу облика $A\,\beta\,B$, за све везнике у формулама A и B рећи ћемо да су *у области* везника β у формули C. А када C има потформулу облика $\neg A$, за све везнике у формули A рећи ћемо да су *у области* негације у формули C.

У исказној формули $(p \wedge q) \vee ((\neg p \wedge r) \wedge q)$ имамо конјункцију у области дисјункције, али не и дисјункцију у области конјункције; негација је у области и конјункције и дисјункције, али ни конјункција ни дисјункција нису у њеној области.

Претпоставимо сада да у нашем формалном језику за исказну логику имамо само следеће везнике: конјункцију, дисјункцију и негацију. Скуп који чине та три везника је као што знамо функционално потпун (в. прошли одељак 1.15).

За неку исказну формулу у том језику рећи ћемо да је у *дисјунктивној нормалној форми* када у њој нема ниједног везника у области негације и нема дисјункције у области конјункције. У таквој исказној формули негације могу да стоје само испред исказних слова. Пример такве исказне формуле имамо горе.

За неку исказну формулу у истом језику рећи ћемо да је у *конјунктивној нормалној форми* када у њој нема ниједног везника у области негације и нема конјункције у области дисјункције. Пример такве исказне формуле је $((p \vee q) \wedge ((\neg p \vee r) \vee q)) \wedge \neg q$.

Исказну формулу у дисјунктивној нормалној форми сликовито можемо замислити као да се састоји од три слоја. Најповршнији је слој дисјункција, испод њега је слој конјункција, а најдубљи слој негација. Неки од тих слојева, можда чак сви, могу и недостајати. Ако има сва три слоја, таква исказна формула гледана као дрво (в. одељак 1.9) има дисјункцију у корену, и можда још у неким чворовима изнад корена; негације су одмах испод листова, а све конјункције су у осталим чворовима у средини. За конјунктивну нормалну форму све је исто, само конјункција и дисјункција замене места.

Дисјунктивна и конјунктивна нормална форма се не искључују. Довољно је да фали конјунктивни слој, или пак дисјунктивни слој, па да наша исказна формула буде и у једној и другој нормалној форми. Ако у исказној формули нашег језика негације стоје само испред исказних слова или их уопште нема, и имамо само конјункције, а нема дисјункција, или само дисјункције, а нема конјункција, онда је та исказна формула и у дисјунктивној и у конјунктивној нормалној форми. Свако исказно слово је такође исказна формула и у дисјунктивној и у конјунктивној нормалној форми.

У дисјунктивној нормалној форми, с обзиром да имамо асоцијативност дисјункције (в одељак 1.14), није важно како су заграде распоређене око дисјункција, ако их има више парова. Можемо да замислимо да имамо само једну n-арну дисјункцију, где је $n \geq 1$. Ако је $n = 1$, онда се та дисјункција, у којој имамо само један дисјункт, поклапа са унарним идентичним везником α_{I} (в. одељак 1.3). С обзиром да имамо и асоцијативност конјункције, можемо да замислимо да је сваки дисјункт те n-арне дисјункције једна m-арна конјункција за неки природни број $m \geq 1$, при чему то m не мора да буде исто за сваки дисјункт. А сваки конјункт једне такве m-арне конјункције је *литерал*, што значи или исказно слово или негација исказног слова. У конјунктивној нормалној форми имамо једну n-арну конјункцију чији су конјункти m-арне дисјункције, а сваки дисјункт једне такве дисјункције је литерал.

У вези са тим нормалним формама важно је следеће тврђење, које смо најавили на почетку одељка.

Тврђење о дисјунктивној и конјунктивној нормалној форми. Свака исказна формула еквивалентна је једној исказној формули у дисјунктивној нормалној форми и једној исказној формули у конјунктивној нормалној форми.

Описаћемо сада како за било коју исказну формулу можемо да добијемо једну њену дисјунктивну нормалну форму, тј. исказну формулу у дисјунктивној нормалној форми еквивалентну њој. Ту дисјунктивну нормалну форму ишчитаћемо такорећи из истиносне таблице за нашу исказну формулу. Узмимо нпр. исказну формулу $(p \to q) \to q$, за коју имамо истиносну таблицу:

$$\begin{array}{ccccc} (p & \to & q) & \to & q \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Узмимо затим редове те таблице где испод главног везника стоји 1. То су први, други и трећи ред испод $(p \to q) \to q$. У првом реду p има истиносну вредност 1 и q има истиносну вредност 1, што даје конјункцију $p \wedge q$, која са тим истиносним вредностима за p и q има истиносну вредност 1. У другом реду p има истиносну вредност 1 и q има истиносну вредност 0, што даје конјункцију $p \wedge \neg q$, која са тим истиносним вредностима за p и q има истиносну вредност 1. Најзад, у трећем реду p има истиносну вредност 0 и q има истиносну вредност 1, што даје конјункцију $\neg p \wedge q$, која са тим истиносним вредностима за p и q има истиносну вредност 1. Те три конјункције стављамо у дисјункције и добијамо следећу исказну формулу $((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$, која је у дисјунктивној нормалној форми. Нека од наше три конјункције има истиносну вредност 1 ако и само ако та исказна формула има истиносну вредност 1. Лако је проверити да је та исказна формула еквивалентна са $(p \rightarrow q) \rightarrow q$.

Дисјунктивна нормална форма неке исказне формуле није јединствена, тј. има више различитих исказних формула у дисјунктивној нормалној форми које су све еквивалентне са нашом исказном формулом. Са $(p \rightarrow q) \rightarrow q$ еквивалентна је осим исказне формуле из прошлог пасуса и краћа исказна формула $p \vee q$, која је исто у дисјунктивној нормалној форми. Та последња исказна формула је и у конјунктивној нормалној форми.

Једну конјунктивну нормалну форму неке исказне формуле, тј. исказну формулу у конјунктивној нормалној форми еквивалентну тој исказној формули, можемо да добијемо на начин који се може назвати дуалним у односу на онај малопређашњи за дисјунктивну нормалну форму – прелазак са једног начина на други почива на дуалности између конјункције и дисјункције (в. одељак 1.14). Да би пример био довољно илустративан узмимо негацију претходне исказне формуле, тј. $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow q)$, за коју имамо истиносну таблицу:

$\neg$	(	(p	$\rightarrow$	q)	$\rightarrow$	q)
0		1	1	1	1	1
0		1	0	0	1	0
0		0	1	1	1	1
1		0	1	0	0	0

Узмимо затим редове те таблице где испод главног везника стоји 0. То су први, други и трећи ред испод $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow q)$. У првом реду p има истиносну вредност 1 и q има истиносну вредност 1, што сада даје дисјункцију $\neg p \vee \neg q$, која са тим истиносним вредностима за p и q има истиносну вредност 0. У другом реду p има истиносну вредност 1 и q има истиносну вредност 0, што даје дисјункцију $\neg p \vee q$, која са тим истиносним вредностима за p и q има истиносну вредност 0. Најзад, у трећем реду p има истиносну вредност 0 и q има истиносну вредност 1, што даје дисјункцију $p \vee \neg q$, која са тим истиносним вредностима за p и q има истиносну вредност 0. Те три дисјункције стављамо у конјункције и добијамо исказну формулу $((\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)) \wedge (p \vee \neg q)$, која је у конјунктивној нормалној форми. Нека од наше три дисјункције има истиносну вредност 0 ако и само ако та исказна формула има истиносну вредност 0. Може да се провери да је та исказна формула еквивалентна са $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow q)$.

Поступајући на тај начин, као конјунктивну нормалну форму за $(p \to q) \to q$ добијамо $p \vee q$, коју смо већ споменули као могућу дисјунктивну нормалну форму. Дисјунктивна нормална форма за $\neg((p \to q) \to q)$ добијена на претходни начин је $\neg p \wedge \neg q$, што је и алтернативна конјунктивна нормална форма за ту исказну формулу.

Свести неку формулу на дисјунктивну, односно конјунктивну, нормалну форму значи, у складу са оним што смо рекли на почетку овог одељка, наћи неку њену дисјунктивну, односно конјунктивну, нормалну форму. Наши примери свођења на дисјунктивну и конјунктивну нормалну форму преко истиносних таблица нису доказ тврђења о тим нормалним формама, мада би на основу њих један такав доказ могао да се замисли.

Значајније је међутим свођење на те нормалне форме које није семантичко као то преко истиносних таблица, него синтаксно. Помоћу њега би се доказала једна синтаксна верзија тврђења о нормалним формама, коју ћемо споменути у вези са доказом потпуности у одељку 1.19.

1.17. Формални системи за исказну логику

Наша индуктивна дефиниција исказних формула је као нека апстрактна машина која производи те формуле. Крене од најједноставнијих, атомских, формула, па онда прави све сложеније формуле од већ направљених формула.

Да ли можда постоји нека таква апстрактна машина, опет заснована на некаквој индуктивној дефиницији, која ће да произведе не све исказне формуле, него само оне које су таутологије? Да, постоје такве апстрактне машине, и оне се називају *формалним системима* за исказну логику.

Осим формалних система за исказну логику постоје формални системи за предикатску логику (в. одељак 2.11) и друге делове математике (некима од њих бавићемо се у одељцима 2.13 и 2.14). Није јасно да ли постоје нематематички формални системи, јер без обзира на то о чему би ти други формални системи требало да говоре они су у математичком руху.

Формуле које формални системи производе називају се *теореме*. Каже се још да су формуле које су теореме *доказиве* у формалном систему.

Касније ће се испоставити да се теореме у формалним системима за исказну логику поклапају са таутологијама. Теореме се међутим дефинишу сасвим друкчије од таутологија. У њиховој дефиницији нема валуација, ни истиносних вредности, ни уопште семантике.

Једна врста формалних система за исказну логику је аксиоматска. Известан број формула се прогласи *аксиомама*. Те формуле биће теореме, базичне теореме.

Део дефиниције формалног система који каже да су аксиоме теореме је база индуктивне дефиниције. Остале теореме се добијају од већ добијених применом неких *правила*. Део дефиниције који говори о тим правилима је индуктивни корак. У аксиоматским формалним системима за исказну логику најчешће се јавља једно једино правило, *модус поненс*, које каже:

Из премиса $A \to B$ и A закључи B.

Премисе модус поненса када је реч о индуктивном дефинисању теорема гласе „$A \to B$ је теорема" и „A је теорема", а закључак је „B је теорема". (Приметимо да је истинита импликација „Ако су исказне формуле $A \to B$ и A таутологије, онда је B таутологија"; в. одељак 1.19.)

Једно дрво (в. одељак 1.9) састављено од формула које на листовима има аксиоме, и где је свако рачвање оправдано модус поненсом назива се *доказ* у формалном систему. То је доказ теореме – каже се још и *доказ за теорему* – која се налази у корену дрвета. Доказ за аксиому је закржљало дрво са само једним чвором, који је и лист и корен, у којем се налази та аксиома. Мало сложенији пример доказа даћемо доле.

Често се место тог дрвета доказом назива низ формула добијен из дрвета, при чему се захтева једино да премисе модус поненса претходе закључку. У таквом низу се слабије види структура дедукције, и да би се то надокнадило обележава се са стране из којих формула је нека формула добијена модус поненсом.

Ако бисмо све таутологије ставили међу аксиоме, никаква правила нам не би била потребна, али то што бисмо добили не би ништа говорило о формалној дедукцији (в. одељак 0.4). Од формалних система се то међутим очекује.

Као аксиоме се обично узимају инстанце коначно много таутологија (и то *коначно много* овде обично значи не више од 10-15). Када би све таутологије биле аксиоме, то не би био случај. Примера ради, можемо да узмемо као аксиоме, уз модус поненс као једино правило, све инстанце следећих таутологија:

$$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)),$$
$$p \to (q \to p),$$
$$((p \to q) \to p) \to p,$$

$$p \to (q \to (p \wedge q)),$$
$$(p \wedge q) \to p, \qquad (p \wedge q) \to q,$$

$$p \to (p \vee q), \qquad q \to (p \vee q),$$
$$(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)),$$

$$\bot \to p.$$

У трећем реду имамо Персов закон (в. одељак 1.13).

Ево примера доказа у том формалном систему:

$$
\begin{array}{ccc}
 & p \to ((q \to p) \to p) \qquad & (p \to ((q \to p) \to p)) \to ((p \to (q \to p)) \to (p \to p)) \\
 & \backslash \qquad & / \\
p \to (q \to p) \qquad & (p \to (q \to p)) \to (p \to p) & \\
\backslash \qquad & / & \\
p \to p & &
\end{array}
$$

Аксиома у првом листу слева је исказна формула у другом реду наше листе горе, а аксиома у средишњем листу је инстанца те исказне формуле (место q супституисали смо $q \to p$, тј. $(q \to p)$, кад вратимо спољашње заграде које подразумевамо). Аксиома у првом листу здесна је инстанца исказне формуле у првом реду наше листе (место q супституисали смо $q \to p$, а место r супституисали смо p). Доказана теорема је $p \to p$.

Осим што треба да нас нешто науче о формалној дедукцији, формални системи помажу да се систематишу логичке истине у широј области логике него што је исказна логика, у предикатској логици. У предикатској логици не постоје семантичка средства тако ефикасна као што су истиносне таблице која би тај посао увек обавила боље и лакше од формалних система (в. крај одељка 2.11). У следећем одељку 1.18 рећи ћемо нешто о формалним системима практичнијим од аксиоматских, у којима је лакше наћи доказе.

1.18. Природна дедукција

Формални системи за исказну логику неће много рећи о формалној дедукцији ако се ограничимо само на правило модус поненса. (Докази у таквим формалним системима могу да буду прилично мукотрпни.) Боље је за ту сврху да се дозволи више правила. Та правила могу да се изведу из теорема које су импликације и модус поненса. Кад год је импликација $A \to B$ теорема, онда имамо као *изведено правило* у формалном систему:

Из A закључи B.

(О таквим стварима смо већ говорили на почетку одељка 1.14.) Више ћемо научити о формалној дедукцији ако имамо нека од тих изведених правила већ спремна пред очима.

Једно корисно изведено правило може да буде *правило контрапозиције*:

Из $A \to B$ закључи $\neg B \to \neg A$.

То правило је везано за таутологију $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$, коју бисмо могли да назовемо *законом контрапозиције*. Сродни закони су следеће три таутологије: $(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$, $(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$ и $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$, од којих свака даје одговарајуће правило. (Ти закони се тичу преласка са Де Моргановых закона на еквиваленције које дају дефиницију $\wedge$ преко $\vee$ и $\neg$ и дефиницију $\vee$ преко $\wedge$ и $\neg$; в. одељак 1.15.)

Једно друго корисно изведено правило може да буде *правило транзитивности импликације*:

Из премиса $A \to B$ и $B \to C$ закључи $A \to C$,

које је везано за таутологију $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$.

Важна су следећа изведена правила која се тичу конјункције:

Из премиса A и B закључи $A \wedge B$;

Из $A \wedge B$ закључи A;

Из $A \wedge B$ закључи B.

Та правила, која су везана за таутологије $p \to (q \to (p \wedge q))$, $(p \wedge q) \to p$ и $(p \wedge q) \to q$, споменули смо на крају одељка 1.10, а те таутологије су споменуте у списку аксиома који смо дали горе за пример. У тим правилима од везника се спомиње само конјункција, и преко њих се добијају све дедукције које се тичу само конјункције. Прво од тих правила уводи конјункцију као главни везник, а друго и треће је елиминишу.

Можемо ли за све везнике да добијемо правила као што су та за конјункцију? Том циљу ћемо се приближити ако у нашим формалним системима уведемо *доказе из хипотеза*. Ти докази се разликују од обичних доказа теорема по томе што на листовима не морају стајати само аксиоме, него могу стајати и произвољне формуле, које називамо *хипотезама*. Формула у корену онда није теорема, није доказана апсолутно, него је доказана из хипотеза које су у листовима. Обични докази су гранични случај доказа из хипотеза, у којима је скуп хипотеза празан.

За импликацију имамо правило које је елиминише – то је модус поненс. А са доказима из хипотеза можемо да формулишемо и једно правило које је уводи као главни везник. То је правило којим прелазимо не са формула као премиса на формулу као закључак, него са доказа из хипотеза на доказ из хипотеза. Означимо са Γ неки скуп формула – можда празан – чији чланови ће да буду наше хипотезе. Онда правило за *увођење импликације* гласи:

Са доказа за B из хипотезе A и хипотеза у Γ, пређи на доказ за $A \to B$ из хипотеза у Γ.

У случају да је Γ празан скуп, тј. нема тих додатних хипотеза које су чланови тог скупа, правило за увођење импликације гласи:

Са доказа за B из хипотезе A, пређи на доказ за $A \to B$.

За формулу $A \to B$ је овде речено да има доказ без хипотеза, тј. она је теорема.

Правило за увођење импликације се слаже са идејом да импликација бележи да ако претпоставимо антецеденс – узмемо га као хипотезу – онда можемо да стигнемо до консеквенса. Модус поненс, који је правило за елиминисање импликације, је у складу са том истом идејом.

Формални системи засновани на правилима као што су она горња за конјункцију и ова за импликацију – а то су правило за увођење импликације и модус поненс – називају се *системима природне дедукције*. (Такве формалне системе је први изучавао Генцен, кога смо споменули у одељку 0.3.)

У системима природне дедукције уопште не мора да буде аксиома. Правило за увођење импликације надокнађује њихово одсуство. Применом тог правила можемо да смањујемо број хипотеза, а када их више уопште нема добили смо теореме. Из хипотезе $p \wedge q$ елиминисањем конјункције закључимо p, а онда применом правила за увођење импликације добијамо доказ за $(p \wedge q) \to p$ без хипотеза. Та исказна формула је значи теорема. Слично томе, из хипотеза p и q увођењем конјункције закључимо $p \wedge q$, па применом правила за увођење импликације добијамо доказ за $q \to (p \wedge q)$ из хипотезе p, а онда још једном применимо правило за увођење импликације да бисмо добили теорему $p \to (q \to (p \wedge q))$.

Као посебан случај правила за увођење импликације имамо следеће правило:

Са доказа за $\perp$ из хипотезе A, пређи на доказ за $\neg A$,

где је $\neg A$ дефинисано као $A \to \perp$ (в. одељак 1.15). То правило се зове *свођење на апсурд* (латински *reductio ad absurdum*), и њиме је забележен веома природан начин за доказивање негација. Закључујемо исказ $\neg p$ *побијањем* исказа p, тј. ако смо из претпоставке да је p тачно дошли до апсурда. Свођењем на апсурд добија се доказ да квадратни корен из 2 није рационалан број, тј. да не може да се напише као разломак m/n два природна броја m и n – што је једно од првих великих открића у математици (в. одељак 2.13). И филозофи су много тога побијали. (Старогрчки филозоф Зенон Елејац нпр. је свођењем на апсурд хтео да докаже да нема кретања.)

Једна друга врста свођења на апсурд, *јако* свођење на апсурд, дато је следећим правилом:

Са доказа за $\perp$ из хипотезе $\neg A$, пређи на доказ за A.

То правило је у вези са законом двоструке негације (в. одељак 1.12). Обично свођење на апсурд – оно које смо дали горе – омогућује нам да са доказа за $\perp$ из хипотезе

$\neg A$, пређемо на доказ за $\neg\neg A$, а импликација $\neg\neg A \to A$, која је један од конјунката у еквиваленцији закона двоструке негације, омогућује нам затим уз модус поненс да са $\neg\neg A$ пређемо на A, и тако добијемо правило јаког свођења на апсурд.

И код обичног и код јаког свођења на апсурд навели смо само случајеве где је скуп додатних хипотеза Γ празан. Постоје међутим општије верзије тих правила где је тај скуп непразан (в. на крају књиге задатак 5 уз овај одељак).

За формалне системе који нису системи природне дедукције, него су аксиоматски – тј. имају аксиоме и заснивају се, као што је уобичајено за формалне системе за исказну логику, искључиво на правилу модус поненс – импликација која одговара правилу за увођење импликације доказује се као теорема у метајезику. Та импликација гласи:

> Ако постоји доказ за B из хипотезе A и хипотеза у Γ, онда постоји доказ за $A \to B$ из хипотеза у Γ

и зове се *теорема дедукције*. У системима природне дедукције ту теорему не доказујемо, него је претпостављамо, и то је боље ако желимо да се бавимо формалном дедукцијом.

Све ово указује на везу између таутологија и формалне дедукције. Са уобичајене семантичке тачке гледишта она се често губи из вида.

Пошто је свака инстанца од $B \to (A \to B)$ аксиома, па према томе и теорема, нашег формалног система за исказну логику из прошлог одељка 1.17, уз модус поненс добијамо и следећу импликацију, коју можемо да сматрамо граничним случајем теореме дедукције:

> Ако постоји доказ за B из хипотеза у Γ, онда постоји доказ за $A \to B$ из хипотеза у Γ.

Одговарајући гранични случај правила за увођење импликације је:

> Са доказа за B из хипотеза у Γ, пређи на доказ за $A \to B$ из хипотеза у Γ.

Ако смо доказали исказ B, онда смо доказали и слабији исказ $A \to B$, тј. B под претпоставком да A.

Импликација за коју уз модус поненс претпостављамо само правило за увођење импликације, тј. теорему дедукције, заједно са граничним случајевима из прошлог пасуса, није класична, тј. материјална, импликација – импликација класичне логике. Ако претпоставимо само то добијамо *интуиционистичку импликацију*. За интуиционистичку импликацију не важи Персов закон $((p \to q) \to p) \to p$.

Интуиционистичка логика се лепо представља у системима природне дедукције, а што се тиче аксиоматских формалних система имамо следеће. Аксиоматски формални систем за интуиционистичку исказну логику, и касније аксиоматски формални систем за интуиционистичку предикатску логику првог реда, добијају се из нашег аксиоматског формалног система за исказну логику из овог одељка, и из аксиоматског формалног система из одељка 2.11, одбацивањем Персовог закона. Ништа друго се не мења. У интуиционистичкој логици, искључење трећег $p \vee \neg p$ и једна од импликација из закона двоструке негације $\neg\neg p \to p$ нису доказиве. Не прихвата се ни правило јаког свођења на апсурд, које је, као што смо видели горе, у вези са том импликацијом.

Искључење трећег не важи ни у некласичним логикама које се зову *вишевредносним*. То су логике у којима за везнике важи истиносна функционалност (в. одељак 1.3), али имамо три или више истиносних вредности. Интуиционистичка логика није међутим те врсте, и сигурно је значајнија од вишевредносних логика. У интуиционистичкој логици не важи истиносна функционалност.

Обраћање пажње на дедукције могло би да објасни зашто се у основној логици бавимо баш речима наведеним на почетку књиге, у другом пасусу одељка 0.1. Све те речи играле би неку посебну улогу у дедукцијама, а о којој се улози ради требало би да покажу правила природне дедукције.

1.19. Потпуност исказне логике

Неки формални систем за исказну логику је *потпун* када се његове теореме подударају са таутологијама, тј. када су скуп теорема и скуп таутологија један исти скуп исказних формула. Другим речима, имамо следеће тврђење.

Потпуност. За сваку исказну формулу важи да је теорема ако и само ако је таутологија.

Лакше је обично да се докаже импликација слева удесно, тј. да ако је нека исказна формула теорема, онда је она таутологија. У аксиоматским формалним системима где је једино правило модус поненс биће довољно да се утврди да су аксиоме таутологије, јер (као што смо већ констатовали у загради у одељку 1.17) ако су исказне формуле $A \to B$ и A таутологије, онда је B таутологија. То се показује овако. Претпоставимо да су $A \to B$ и A таутологије. Онда за произвољну валуацију $A \to B$ и A имају истиносну вредност 1. Искључено је да за ту валуацију B има истиносну вредност 0, јер се то не би сложило са истиносном таблицом за импликацију. Значи, B за произвољну валуацију има истиносну вредност 1, и према томе B је таутологија. Да су на списку који смо узели за пример у одељку 1.17 све аксиоме таутологије је сасвим једноставно да се утврди, јер се ради о инстанцама таутологија које нису велике исказне формуле.

Теже је да се докаже импликација здесна улево, тј. да ако је нека исказна формула таутологија, онда је она теорема. Ко не жели да се упушта у тај доказ може слободно да прескочи текст који следи све до претпоследњег пасуса у одељку.

Доказ. Доказаћемо следећу импликацију: ако нека исказна формула A није теорема нашег формалног система, онда ће све исказне формуле да буду теореме у том формалном систему проширеном са A и свим супституционим инстанцама од A као новим аксиомама.

Одатле, под претпоставком да A није теорема, добијамо да A не може да буде таутологија. Иначе, кад би формула A била таутологија, у проширењу би све теореме биле таутологије, јер са правилима проширеног система, која су иста као и правила почетног система, прелазимо са таутологија на таутологије. Пошто су све исказне формуле теореме у проширеном систему, следило би да су све исказне формуле таутологије, што је апсурдно. Свели смо према томе на апсурд претпоставку да је A таутологија, и можемо да закључимо да A није таутологија (в. свођење на апсурд у прошлом одељку 1.18). Доказали смо дакле импликацију „Ако A није теорема, онда A није таутологија“, одакле преко контрапозиције (в. прошли одељак 1.18) добијамо „Ако је A таутологија, онда је A теорема“, тј. импликацију потпуности здесна улево.

Током доказа импликације из првог пасуса видећемо шта почетни систем и проширени систем треба да задовоље да би доказ могао да се изведе. Све су то уобичајене претпоставке, које задовољава нпр. аксиоматски формални систем за исказну логику из одељка 1.17.

Прелазимо сада на доказ импликације из првог пасуса доказа. Претпоставимо да A није теорема почетног система. Сада треба да смо у стању да закључимо да ћемо у проширеном систему имати као теорему неку конјунктивну нормалну форму A' од A. То је обезбеђено ако почетни систем даје један синтаксни поступак за свођење на конјунктивну нормалну форму, у којем кључну улогу играју закон двоструке негације и еквиваленције из одељка 1.14, а међу њима нарочито Де Морганови закони и дистрибутивност дисјункције над конјункцијом. Те еквиваленције треба да су теореме у почетном систему.

Треба још да смо у стању да закључимо и да ће сваки конјункт n-арне конјункције A' (в. одељак 1.16) да буде теорема у проширеном систему. То је обезбеђено ако у почетном систему имамо изведена правила која се тичу конјункције из одељка 1.18.

У почетном систему треба да је теорема свака исказна формула која одговара m-арној дисјункцији у којој се налазе и неко исказно слово и његова негација, што је уопштење искључења трећег из одељка 1.11. Одатле, са правилима за конјункцију из прошлог пасуса, закључујемо да у n-арној конјункцији A' један од конјунката – назовимо га B – мора да буде такав да се у њему не јавља и једно слово и његова негација. Иначе би A', и такође A, били теореме у почетном систему.

У m-арној дисјункцији B, која је теорема у проширеном систему, сваки дисјункт је исказно слово или негација неког исказног слова. За сваки дисјункт који је исказно слово супституишимо једну произвољну формулу C место тог исказног слова, а за сваки дисјункт који је негација неког исказног слова супституишимо $\neg C$ место тог исказног слова. Том супституцијом добијамо једну m-арну дисјункцију – назовимо је B' – у којој је сваки дисјункт C или $\neg\neg C$. У проширеном систему, као и у изворном, ако је нека исказна формула теорема, онда су јој све супституционе инстанце теореме, зато што смо поред A узели и све супституционе инстанце од A као нове аксиоме. Исказна формула B' је према томе теорема у проширеном систему. Затим треба да смо у стању да закључимо да је C теорема у проширеном систему. То ће да буде случај ако су закон двоструке негације (в. одељак 1.12) и еквиваленције из одељка 1.14, као и све њихове супституционе инстанце, теореме у изворном, па према томе и у проширеном, систему. Претпоставке о изворном систему треба за проширени систем да гарантују и то да ако је еквиваленција две формуле теорема, онда када једну заменимо другом у некој теореми резултат је опет теорема (ради се о једној синтаксној верзији тврђења о замени еквивалената из одељка 1.12, у којој је замену довољно вршити у теоремама које су дисјункције). Пошто можемо овако да поступимо за сваку формулу C, свака исказна формула биће теорема у проширеном систему, што смо хтели да докажемо. ⊣

Постоји и један други доказ потпуности, који се заснива не на конјунктивној него на дисјунктивној нормалној форми, и то баш оној коју смо у одељку 1.16 ишчитали из истиносне таблице. Претпоставимо да је нека исказна формула таутологија. Онда узмемо дисјунктивну нормалну форму ишчитану из истиносне таблице, која треба да буде теорема у нашем формалном систему. Да је та дисјунктивна нормална форма теорема гарантују искључење трећег, правила за конјункцију из прошлог одељка 1.18 и дистрибутивност конјункције над дисјункцијом, поред још неких еквиваленција из одељка 1.14. Наш формални систем треба још да гарантује да се из те теореме може прећи на нашу почетну исказну формулу, и закључити да је она теорема. То ће бити случај ако тај формални систем даје један синтаксни поступак за свођење на дисјунктивну нормалну форму, у којем кључну улогу играју закон двоструке негације и еквиваленције из одељка 1.14, а међу њима нарочито Де Морганови закони и дистрибутивност конјункције над дисјункцијом.

Ти су докази потпуности узори за друге доказе потпуности који се заснивају на нормалним формама. Први доказ, са конјунктивном нормалном формом, дао је

Бернајс, као што смо рекли у одељку 0.3, а доказ са дисјунктивном нормалном формом нешто касније Пост (Emil Post). Важан део онога што раде логичари је свођење на нормалне форме и доказивање потпуности формалних система преко тога, при чему се не ради увек о исказној логици и њеним теоремама и таутологијама, него о нечем сличном. Зато смо и скицирали доказе потпуности горе, да би се преко њих могао да стекне увид у једну веома важну, ако не најважнију, врсту логичких резултата.

Потпуност говори о складу синтаксе са семантиком. Логичке истине исказне логике дефинисане су синтаксно преко теорема, а семантички преко таутологија. Та два приступа њиховом дефинисању се веома разликују, и није одмах јасно да ће да дају исти резултат. Потпуност међутим каже да то јесте случај.

2. ПРЕДИКАТСКА ЛОГИКА

2.1. Предикати

Предикатска логика, којом ћемо надаље да се у овој књизи бавимо, назива се неки пут и предикатским *рачуном*, при чему се за реч *рачун* ту може рећи исто што је речено за исказни рачун на почетку одељка 1.1. У предикатској логици као логичке речи – речи на чијем значењу ће да се заснивају логичке истине и формалне дедукције – поред везника имамо речи *сви* и *неки*, које се зову *квантификатори*, и реч *је*, која се односи на једнакост.

Термин *предикат*, који улази у име предикатске логике, је још једна реч коју логика преузима из граматике, али са промењеним значењем. Неки пут ће логички предикати да буду оно што се у граматици тако зове, а неки пут неће. До логичког схватања предиката стижемо када осим употребе језика коју имамо када се језиком служимо да бисмо нешто тврдили, употребе о којој смо говорили у одељку 1.1, узмемо у обзир и употребу језика коју имамо када се језиком служимо да нешто *именујемо*, коју смо у малопре поменутом одељку само споменули. Језиком се служимо да именујемо када нешто зовемо његовим именом.

Појединачне речи и сложеније изразе помоћу којих нешто именујемо зваћемо засада, као што је природно, *именима*. (Касније ћемо увести место речи *име* техничке термине који се користе у логици, као што су *индивидуална константа* и *терм*; в. одељак 2.5.) Имена ће за нас бити пре свега нешто као властита имена. Таква имена имају људи и још нека жива бића, и да би било мање недоумице додају им се презимена. Прецизна имена за грађане се добијају са цифрама јединственог матичног броја. Таква прецизност у именовању постоји још у астрономији, орографији и хидрографији. Датуми су прецизна имена временских тренутака. Цифре су имена за бројеве.

Име у том смислу је као нека етикета коју лепимо за појединачну ствар, коју ћемо звати техничким термином *објекат*. (Ова употреба речи *објекат* не потиче из граматике – не ради се о граматичким објектима.) Објектом можемо прогласити било шта, материјално или нематеријално, конкретно или апстрактно. Објекти су као некакви предмети или ствари, али свет у којем се они налазе може да буде необичан.

Није јасно шта има првенство – објекти или пак имена. Имена могу да се одреде као оно у језику што се односи на објекте, а, с друге стране, објекти могу да се одреде као оно у свету на шта се односе имена. *Свет* је овде оно о чему језик говори, а то може бити материјално као и нематеријално, конкретно као и апстрактно. У астрономском свету објекти су небеска тела, а у математичком бројеви или скупови. У обичном животу објекти могу да буду ђаци или школски предмети – математика, српски, итд.

За логику смо значи издвојили две основне употребе језика – тврђење и именовање. Оно што су искази за тврђење – оно у језику чиме се нешто тврди – то су имена за именовање – оно у језику чиме се нешто именује. Све друге врсте израза којима се бавимо у логици, тј. све друге за логику занимљиве *граматичке категорије*, биће дефинисане преко две основне граматичке категорије – категорије исказа и категорије имена. Тако смо већ имали везнике дефинисане као нешто са чим се граде искази од исказа.

Предикати ће слично томе бити нешто са чим се граде искази од имена. Као и везници, предикати ће имати *арност*; арност неког предиката је број имена потребан да се направи исказ од њих и тог предиката.

Пример унарног предиката је *спава*, што од имена *Марко* гради исказ „Марко спава". Овде се употреба речи предикат слаже са обичном употребом те речи у граматици. (У граматици, али не и у логици, каже се још да је *Марко* субјекат у тој реченици.) Као пример бинарног предиката имамо *је јачи него*, који од имена *Марко* и *Јанко* гради исказ „Марко је јачи него Јанко".

Други начин да се стигне до предиката је да се узме исказ па да се из њега бришу имена. Резултат је предикат оне арности колико је имена избрисано. (На сличан начин смо могли да дођемо до везника бришући исказе.) Тако из исказа „Марко је јачи него Јанко" брисањем оба имена добијамо горенаведени бинарни предикат. Брисањем имена *Марко* добијамо унарни предикат *је јачи него Јанко*, а брисањем имена *Јанко* добијамо унарни предикат *Марко је јачи него*. Ту се логичка и граматичка употреба речи *предикат* више не слажу. У граматици *Марко је јачи него* никако не би био предикат.

Исказ „Марко је јачи него Јанко" схватамо као исказ $3 > 2$, или речима „Три премашује два". Зашто би у том исказу 3, као граматички субјекат, било у другачијем положају него граматички објекат 2? Зашто би > 2 било предикат, а $3 >$ не би?

Да смо место *је јачи него* ставили *је јачи од*, што је вероватно природније, и то би био бинарни предикат, али да би се добила граматички добро склопљена реченица „Марко је јачи од Јанка" име *Јанко* мора да се стави у генитив. Логика занемарује такве граматичке варијације (упореди ред речи у одељку 1.2), и *Јанко* је за њу исто име у свим падежима. Узели смо ипак *је јачи него* као први пример бинарног предиката да не бисмо морали одмах да улазимо у ова објашњења.

У исказној логици смо код анализе исказа направљених помоћу везника на крају стизали до исказа који немају више правих делова који би били искази. Код тих атома наша се анализа заустављала. А сада, у предикатској логици, анализирамо и такве исказе. Гледамо како су направљени помоћу имена и предиката. Наша анализа структуре реченица постаје финија.

Предиката имамо арности n за сваки природни број n, па и за $n = 0$. Као што су нуларни везници били искази (в. одељак 1.3), тако су и нуларни предикати исто искази. Брисањем нула имена, тј. не брисањем ничега, добијамо из њих исказе. Због наше истиносно-функцијске тачке гледишта имали смо само два нуларна везника, $\top$ и $\bot$. Нема међутим разлога да нуларне предикате ограничимо само на та два исказа. Било који исказ би био нуларни предикат. Тако би искази били само посебна, гранична, врста предиката.

Појам је једна не сасвим прецизна реч обичног језика, у вези са значењем предиката, која за нас неће бити технички термин. У старинској, аристотеловској, логици претендовало се међутим да је *појам* добро схваћен технички термин, и најближи предикатској логици је био један део старинске логике који се служио том речју. Радило се о нечем везаном за унарне предикате, али није било сасвим јасно да ли се ради о таквим предикатима или пак именима. Предикати арности веће од 1 нису узимани у обзир, једним делом и зато што се као у граматици код анализе реченица предност давала субјекатско-предикатској структури. И субјекту и предикату су одговарали појмови. Био је то не само веома ограничен, него и конфузан приступ, оптерећен предрасудама. Више је стварао лажне проблеме него што је решавао праве.

Неки пут се међутим с речју *појам* може да каже краће и природније нешто што би могло да се каже и без ње на прецизнији, али зато дужи и мање природан начин. Због тога ће понегде и у овој књизи да се употреби та реч. (Али неће никако да се употребљава реч *концепт*, која је до недавно значила искључиво *нацрт*, *скица*, а којом неки покушавају да замене реч *појам* јер им ваљда изгледа ученије.)

2.2. Релације

Предикати су у синтакси. Њима у семантици одговарају *релације*, којима ћемо сада да се позабавимо.

У математици се двочлани скуп, неуређени пар, $\{a, b\}$ разликује од *уређеног пара* (a, b). Скупови $\{a, b\}$ и $\{b, a\}$ су исти скуп – имају исте чланове – али су зато уређени парови (a, b) и (b, a) различити, под претпоставком да су a и b различити објекти. У уређеном пару (a, b) на првом месту је a, а на другом b, док је у уређеном пару (b, a) на првом месту b, а на другом a.

Због тог разликовања првог и другог места треба да важи следећа еквиваленција:

> Уређени парови (a, b) и (a', b') су једнаки ако и само ако је a једнако a' и b једнако b'.

Та еквиваленција ће да важи ако се (a, b) дефинише као скуп $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, али има и других таквих скуповних дефиниција које то гарантују. Такве дефиниције се дају да би се све свело на скупове.

У уређеном пару на првом и другом месту може да стоји исти објекат, тако да имамо (a, a). Ако је a једнако b, онда је $\{a, b\}$ скуп $\{a\}$, а $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ је скуп $\{\{a\}\}$.

Појам уређеног пара је веома значајан у математици. Велики филозоф и математичар Декарт (René Descartes) је открио да се преко координатног система тачке у равни могу да поистовете са уређеним паровима бројева, и на основу тога свео геометрију на анализу, тј. теорију реалних бројева. Бројеви разних врста – цели бројеви, рационални бројеви, реални бројеви, комплексни бројеви – дефинишу се једни преко других полазећи од природних бројева, све преко уређених парова. Појам низа се заснива на појму уређеног пара. И, можда најважније, појам функције се дефинише преко појма уређеног пара (в. одељак 2.12).

Уређени парови нису значајни само за математику. Они се тичу значења свих бинарних предиката, и математичких и нематематичких, као што ћемо да видимо у следећем одељку 2.3. У истом духу, може да се говори о значењу предиката свих арности. Уређени парови су у темељима логички схваћене семантике.

Преко уређених парова дефинишемо *Декартов производ* $X \times Y$ скупова X и Y, који не морају да буду различити; скуп $X \times Y$ је скуп свих уређених парова (a, b) таквих да је a из X и b из Y. Када су X и Y тачке на координатним осама, Декартов производ $X \times Y$ је скуп тачака у равни.

Бинарним релацијама између скупова X и Y називају се подскупови од $X \times Y$, тј. скупови неких, не обавезно свих, уређених парова (a, b) таквих да је a из X и b из Y. Као подскуп од $X \times Y$ долази у обзир и празан скуп, тј. скуп без чланова, и сам скуп $X \times Y$. То ћемо сада да образложимо.

Место „a је члан од X“ (каже се још „a је елемент од X“, или „a припада X“, или „a је из X“, или „a је у X“) пише се формула $a \in X$. Овде се подразумева да је X скуп. То $\in$, које одговара речи *је* када се она односи на припадност, као у исказу „Два је паран број“, а не на једнакост, као у исказу „Два пута два је 4“, је основни појам теорије скупова (в. одељке 0.1 и 2.14).

Каже се да је Z *подскуп* од W ако и само ако је за сваки објекат c истинита импликација да ако $c \in Z$, онда $c \in W$. Када је Z празан скуп, $c \in Z$ је лажно, па је према томе та импликација истинита. Одатле закључујемо да је празан скуп подскуп сваког скупа, па и од скупа $X \times Y$. Пошто је импликација „ако $c \in Z$, онда $c \in Z$“

инстанца таутологије $p \to p$, па је увек истинита, можемо да закључимо да је сваки скуп, па и скуп $X \times Y$, подскуп самог себе.

Декартов производ $X \times X$ пише се скраћено X^2, а за подскупове од X^2 каже се да су бинарне релације *на* X. Бинарне релације на X су дакле релације између скупа X и скупа X.

Нека је X^3 скуп $X^2 \times X$, тј. $(X \times X) \times X$; онда су тернарне релације на X подскупови од X^3. На исти начин за свако n које је веће од 2 узећемо да је X^{n+1} скуп $X^n \times X$, а релације арности $n + 1$ на X су подскупови од X^{n+1}. Унарне релације, тј. релације арности 1, на X су подскупови од X^1, а X^1 ће бити сам скуп X. Узимајући случај када је $n = 1$ као базу, ми смо овде дали индуктивну дефиницију скупа X^n за $n \geq 1$ (в. одељак 1.7). Чланови од X^n су *низови* дужине n.

У следећем одељку 2.3 даћемо неколико примера бинарних и унарних релација.

2.3. Предикати се интерпретирају релацијама

Као што смо рекли у одељку 1.10, интерпретацијом се у логици назива прелазак са језика на свет о којем тај језик треба да говори. У предикатској логици желимо да говоримо о неком свету објеката. Скуп свих тих објеката зваће се *домен*. Наш језик интерпретирамо у неком домену.

Интерпретирамо прво имена из нашег језика у неком домену тако што сваком имену припишемо неки објекат из тог домена. Сваком имену тачно један објекат. Затим прелазимо на интерпретацију предиката.

У логици, интерпретирати неки n-арни предикат из нашег језика у неком домену значи приписати му тачно једну n-арну релацију на том домену. Ако у синтакси имамо нпр. бинарни предикат *је мањи од*, онда можемо да га интерпретирамо као бинарну релацију на скупу природних бројева којој припадају сви уређени парови (m, n) такви да је природни број m мањи од природног броја n. То је једна интерпретација тог предиката у домену који је скуп природних бројева.

Може да збуни то што се служимо речју *мањи* и кад говоримо о бинарном предикату и кад говоримо о бинарној релацији којом смо га интерпретирали у нашем примеру. Па може да се помисли да је оно што интерпретирамо и оно чиме то интерпретирамо једно те исто. Наш бинарни предикат је међутим веома различит од те бинарне релације, као што се иначе разликују речи од ствари.

Цифра 3 није исто што и број 3, којим ту цифру интерпретирамо. Цифра 3 састоји се од два отприлике полукружна дела и сасвим је слична ћириличком слову з. Можемо је обојити у црвено. Број 3, шта год да јесте, нема никаве полукружне делове, не личи на слово з и не може да се обоји у црвено. Тај исти број може да се запише и друкчије – римски као III, грчки као γ', а може да се користи и реч *три*. Име *Марко* има пет слова, а нема бркове. Објекат којим интерпретирамо то име – неки тамо јунак – нема пет слова, али зато има бркове.

Бинарни предикат *је мањи од* је низ од осам слова и празних места, или низ од осам гласова, или пак низ од три речи на српском језику. Место тога могли смо да имамо и један једини симбол <. У сваком случају, то је један коначни објекат који се јавља у физичком свету. Бинарна релација којом се тај бинарни предикат интерпретира у нашем примеру је један апстрактни математички објекат, скуп, и то бесконачан, неких уређених парова природних бројева. Као чланове тог скупа имамо нпр. (1, 2), (0, 7), (3283, 17421), итд. Ти уређени парови су и сами апстрактни математички објекти, које, као што смо рекли на почетку прошлог одељка 2.2, можемо да дефинишемо као некакве скупове. Осим тога *мањи* и не мора да се спомиње када описујемо интерпретацију. Можемо да кажемо да се ради о релацији на скупу природних бројева у којој су сви уређени парови (m, n) такви да постоји природни број k различит од 0 за који $m + k = n$.

Бинарни предикат *је мањи од* можемо да интерпретирамо и у неком другом домену – нпр. у домену јунака, чији су чланови Марко, Јанко, и Новак. То је један мали домен јунака – њих свега три. Наш бинарни предикат у том домену може да буде интерпретиран скупом чији су чланови уређени парови (Марко, Јанко) и (Марко, Новак) – само та два. То је зато што је Марко мањи и од Јанка и од Новака, али Јанко и Новак су исти – код њих двојице ниједан није мањи од другог.

Унарни предикат *је прост* се у домену природних бројева интерпретира скупом у којем су 2 и сви бројеви већи од 2 који имају као делиоце само јединицу и саме себе, тј. скупом у којем су бројеви 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, итд. У домену јунака тај унарни предикат може да се интерпретира једночланим скупом чији је једини члан Марко (једини он псује). Може тај предикат међутим да се схвати и друкчије па да се интерпретира нпр. двочланим скупом чији су чланови Марко и Јанко (тај други не псује, али није ни он фини). То је друга интерпретација у истом домену.

Као и у одељку 1.10, где смо се питали у којој мери валуације и истиносне таблице служе да се објасни значење везника, можемо да се питамо да ли интерпретације предиката помоћу релација дају значења тих предиката. Јер код интерпретације бинарног предиката *је мањи од* у домену јунака може да се деси следеће. Може да се деси да је Марко јачи од Јанка и Новака, али су Јанко и Новак подједнако јаки. И онда ће бинарни предикат *је јачи од* да буде исто интерпретиран као бинарни предикат *је мањи од*, а бити мањи значи нешто друго него бити јачи. Може да се деси да унарни предикат *је тврдоглав* у нашем домену јунака буде интерпретиран као малочас унарни предикат *је прост*, зато што је само Марко прост и само

Марко је тврдоглав. Али бити прост изгледа значи нешто друго него бити тврдоглав.

Исказна логика је у изучавању значења исказа увела велико поједностављење тиме што се ограничава на оно што се тиче истиносних вредности. То поједностављење, са којим добијамо истиносну функционалност, упечатљиво је на примеру материјалне импликације (в. одељак 1.5). У предикатској логици имамо слично поједностављење у изучавању значења када се ограничимо на интерпретацију предиката преко релација. Мање прецизно речено, када нас занима само на које објекте се простиру наши предикати, и ништа друго.

Када предикате интерпретирамо искључиво на тај начин, релацијама, каже се да значење схватамо *екстензионално*. Онда смо у семантици за предикате стали на *екстензионалну* тачку гледишта. Као што је сваки скуп потпуно одређен својим члановима, тако је и релација потпуно одређена својим члановима, па два предиката интерпретирана истом релацијом, два предиката који се простиру на исте објекте, неће у тој интерпретацији моћи да се разликују по значењу. Јер друге аспекте значења, због наше екстензионалне тачке гледишта, занемарујемо.

А зашто то занемарујемо? Зашто се ограничавамо на један свет који ако и није сасвим математички, зато што објекти у домену не морају да буду математички, поред тих објеката има само те математичке скуповне конструкције направљене од објеката које се зову релације? Одговор је да нам то, као и поједностављење у исказној логици, омогућава да достигнемо једноставност, прецизност, поузданост. То нам омогућава да изучавамо математичким средствима бар део онога што чини значење.

Почињемо са екстензионалном тачком гледишта, јер гледамо да прво урадимо оно што је једноставније, а теже ствари остављамо за касније. Данас изгледа да ако то друго, то што је значење а није екстензионално (неки пут се то назива *интензионалним*), буде могло да се изучава математичким средствима, биће компликованије. Мада је могуће да нека нова тачка гледишта преокрене ствари.

Поједностављење у семантици исказне логике са којим добијамо истиносну функционалност није друге природе него оно које носи екстензионална тачка гледишта за предикате. Сада ћемо то да објаснимо.

Дефинисаћемо X^n и кад је $n = 0$. Нека X^0 буде неки произвољан једночлани скуп $\{*\}$ (то је у вези са тим да се за бројеве k узима да је $k^0 = 1$, а $*$ може да буде 0). Онда на сваком домену постоје тачно две нуларне релације: $\{*\}$ и празан скуп. Место $\{*\}$ писаћемо 1, а место празног скупа 0, и узећемо да су 1 и 0 наше истиносне вредности. (Прављење 1 и 0 од подскупова једночланог скупа смо већ спомињали у вези са двочланом Буловом алгебром у одељку 1.10.) Нуларне релације, које значи постоје на сваком домену, су истина и лаж. Тим нуларним релацијама, тј.

истиносним вредностима, интерпретирамо нуларне предикате, а то су, као што смо рекли на крају одељка 2.1, искази. Тако је поједностављено схватање семантике исказне логике само гранични случај екстензионалног схватања значења предиката. Класична логика уопште јесте екстензионална.

Могло би се рећи да у примерима горе са унарним предикатима *је прост* и *је тврдоглав* интерпретираним у домену јунака имамо два различита *својства* која имају исти *обим*. У старинској логици, која се бавила само унарним предикатима, и рекло би се тако нешто, али за нас ниједан од та два термина – *својство* и *обим* – неће бити технички. Као што ни термин *појам* није технички. *Обим* би требало да значи исто што и *унарна релација*, а својства су нешто доста нејасно што занемарујемо са екстензионалне тачке гледишта.

2.4. Квантификатори

У исказној логици смо имали исказне променљиве, место којих супституишемо исказе. У предикатској логици су нам потребне променљиве место којих можемо да супституишемо имена, али оне се не зову *именске променљиве*, као што бисмо могли да очекујемо, него *индивидуалне*. Зато што се у енглеском термин *индивидуа* користи неки пут и за било какве објекте, не само за живе јединке.

Као индивидуалне променљиве користићемо слова x, y, z, и још понека када затребају. Кад је из контекста јасно да се ради о индивидуалним променљивима рећи ћемо просто *променљива*, без придева *индивидуална*.

Индивидуалне променљиве су нам потребне да бисмо представили у логици речи *сви* и *неки*. Те речи и оно чиме их представљамо у логици зову се *квантификатори*. (Под утицајем руског или немачког, среће се још на српском и *квантори*.)

Квантификатор *сви* се зове *универзални* квантификатор. Тај квантификатор имамо нпр. у исказу „Сви певају“. Овде *певају* схватамо као унарни предикат, и не обраћамо пажњу на то што је та реч у множини. Место *пева* или *певају* писаћемо P. *Сви* није име, и није прихватљиво да предикат P гради исказ „Сви певају“ од имена *сви*. Него изгледа да квантификатор *сви* гради тај исказ од унарног предиката P. То је прихватљива тачка гледишта, али у логици ће то *сви* да буде рашчлањено.

Прво се од унарног предиката P и неке индивидуалне променљиве, нпр. x, направи Px, један израз који је исте граматичке категорије као искази. Такви изрази ће за нас после да буду формуле. Не кажемо да је Px исказ, јер има променљиву x због које не можемо да кажемо да ли је истинит или лажан. После супституције, када место x ставимо име *Марко* може да буде истинит, јер Марко пева, а када место x ставимо име *Јанко* може да буде лажан, јер тај други не пева. Изрази као Px, који ће као што смо рекли да буду формуле, као и исказне формуле у којима има исказних променљивих, нису у правом смислу речи искази, али су исте граматичке категорије. Тим изразима се показује форма исказа. Тамо где смо се са исказним формулама заустављали, на нивоу атомских исказних формула, моћи ће да се стави Px, чиме ће анализа форме исказа отићи у већу дубину (то смо већ споменули у одељку 2.1).

Испред израза Px пишемо $\forall x$ и добијамо $\forall x\, Px$, којим представљамо исказ „Сви певају". То је тај исказ са речју *сви* рашчлањеном онако како се то чини у предикатској логици, тај исказ записан као формула.

Други, не сасвим природан, начин да се прочита $\forall x\, Px$ је „Сваки објекат пева". Сасвим је међутим природна реченица „Свако је певач". Читање универзалног квантификатора са *сваки* је исто толико присутно у обичном језику, математичком језику и у логици колико и читање са *сви*, па смо од почетка могли да говоримо да је *сваки* универзални квантификатор којим се логика бави.

При свему томе, и са *сви* и са *сваки*, логика не обраћа пажњу на род, коју у обичном језику намеће домен о којем говоримо, и посебности граматике обичног језика. Квантификатор *све* у женском роду и *сва* у средњем, као и *свака* у женском и *свако* у средњем роду, су један те исти универзални квантификатор. Овде се ради о једној од тих граматичких варијација које логика занемарује.

Квантификатор *неки* се зове *егзистенцијални* квантификатор, зато што искази са *неки* могу да се изразе и помоћу глагола *постојати*, као када исказ „Неки објекат пева" изразимо исказом „Постоји објекат који пева", који значи исто. Место *неки* среће се као егзистенцијални квантификатор и *нека*, у женском роду, и *неко*, у средњем. Место „Неки објекат пева", чему одговара природније „Неко пева", може још да се каже и „Бар један објекат пева". За нас је све то исти исказ, са истим егзистенцијалним квантификатором. За тај исказ у логици имамо формулу $\exists x\, Px$.

Сваки и *неки* иду у обичном језику уз једнину, а *сви* уз множину. И то је једна од тих граматичких варијација на које логика не обраћа пажњу, али је ипак неки пут, највише из стилских разлога, природније узимати у пару *сваки* и *неки*, него *сви* и *неки*. То не треба да збуњује, јер *сви* и *сваки* одговарају истом универзалном квантификатору, и имају потпуно исто значење у логици.

Изразе облика $\forall x$ и $\exists x$ направљене од квантификаторских симбола $\forall$ и $\exists$ и индивидуалних променљивих зваћемо *квантификаторски префикси*, или простије *квантификатори*. (Раније се писало и (x) место $\forall x$, а неки аутори стављају заграде око квантификаторских префикса, па имају $(\forall x)$ и $(\exists x)$.) Тако схваћен квантификатор не гради исказе од унарних предиката, што је прихватљива тачка гледишта коју смо горе поменули. Квантификаторски префикс $\forall x$ гради исказ $\forall x\, Px$ од унарног предиката P само заједно са променљивом x из Px. Квантификатору *сви* би одговарао квантификаторски префикс $\forall x$ са придодатом променљивом x из Px. Сам квантификаторски префикс $\forall x$ гради формулу $\forall x\, Px$ од формуле Px, и исте је граматичке категорије као унарни везници.

Квантификаторе схваћене као квантификаторске префиксе можемо дакле да третирамо као неку врсту унарних везника. С тим што грађење тих везника помоћу индивидуалних променљивих и улога коју те променљиве играју заједно са тим везницима у језицима где имамо предикате чине да су ти везници ван оквира исказне логике.

Квантификатори саграђени са индивидуалним променљивима су квантификатори *првог реда*. Квантификаторе другог реда добили бисмо када бисмо имали предикатске променљиве и градили квантификаторе са тим променљивима.

2.5. Језици првог реда

Предикатска логика првог реда, или скраћено *логика првог реда*, бави се везницима којима се бавила исказна логика, и још се осим везницима бави квантификаторима првог реда и једним специјалним бинарним предикатом који се зове *једнакост*. Сада ћемо да опишемо како изгледају формални језици те логике, језици који треба да замене формални језик исказне логике, и који се зову *језици првог реда*. Формуле једног таквог формалног језика дефинишу се индуктивно на следећи начин.

Пре него што пређемо на дефиницију формула, уводимо као техничку скраћеницу реч *терм* – англицизам који се међу логичарима који говоре српски одомаћио место речи *термин*. Терми су индивидуалне променљиве и симболи за имена, које зовемо *индивидуалне константе*. Касније ћемо узети у обзир језике првог реда где и терми могу да буду сложени (в. одељак 2.12); засада сматрамо да су они прости симболи.

Затим дефинишемо *атомске формуле* као низове облика $P\,t_1...t_n$, где је P један n-арни предикатски симбол, а $t_1,..., t_n$ су терми. Овде се обично узима да је $n \geq 1$, и то ћемо и ми да претпоставимо.

Могло би међутим да се дозволи и да је $n = 0$. У том случају би $P\,t_1...t_n$ било P, што је граматичке категорије исказа. Ако су ти нуларни предикатски симболи P исказна слова, онда у нашем формалном језику првог реда имамо исказне формуле.

Међу нашим предикатским симболима претпостављамо да имамо бинарни предикатски симбол једнакости, тј. знак једнакости, =. Атомске формуле направљене са тим симболом обично се пишу $t_1 = t_2$ уместо $= t_1t_2$. Исто се обично ради и за друге бинарне предикатске симболе; као што се бинарни везници умећу између две формуле, тако се и бинарни предикатски симболи обично умећу између два терма. Ми користимо симбол једнакости = и у метајезику, јер је тешко избећи да се он користи у иоле математички оријентисаном тексту. Могли бисмо да уведемо различите симболе за једнакост објект-језика и једнакост метајезика. То међутим није неопходно, а морали бисмо да уведемо необичан симбол за нешто веома обично.

Затим имамо једну индуктивну дефиницију формула која се не разликује битно од индуктивне дефиниције исказних формула. У бази имамо следеће:

Свака атомска формула је формула.

У индуктивном кораку, за $n \geq 1$, имамо:

Резултат примене симбола n-арног везника на n формула је формула, и исто тако резултат примене квантификаторског префикса на једну формулу је формула.

Квантификаторске префиксе $\forall x$ и $\exists x$ третирамо овде као унарне везнике, и применити их на неку формулу значи написати их испред те формуле. С тим је наша индуктивна дефиниција завршена.

Претпоставимо да у нашем језику имамо унарни предикатски симбол P, који смо у прошлом одељку 2.4 читали *пева*. Онда као формулу имамо нпр. $\exists x(Px \wedge \forall y(Py \rightarrow y = x))$. Та формула каже да тачно један објекат, једна индивидуа, пева.

Потформуле формула неког језика првог реда се дефинишу на исти начин као и потформуле исказних формула (в. одељак 1.9).

2.6. Слободна и везана јављања променљивих и супституција

Јављања индивидуалних променљивих у формулама језика првог реда могу да буду *слободна* или *везана*. Када формула C има потформулу облика $\forall x\, A$, за сва јављања променљиве x у формули A која стоји иза $\forall x$ рећи ћемо да су *везана* у формули C. Исто ћемо рећи и када место $\forall x$ имамо $\exists x$. Јављање променљиве у некој формули је *слободно* када није везано.

У атомским формулама сва јављања променљивих су слободна. Ако у некој формули B имамо слободно јављање променљиве x, онда ће то јављање променљиве x да буде везано у формулама $\forall x\, B$ и $\exists x\, B$, и каже се да га *везују* ти квантификаторски префикси које смо ставили испред формуле B.

У формули $\exists x\, Px \wedge \forall y(Py \rightarrow y = x)$, која се мало разликује од формуле дате за пример при крају прошлог одељка 2.5, јављање променљиве x иза P је везано, а оно иза = је слободно; оба јављања променљиве y су везана.

Формуле у којима нема слободних јављања индивидуалних променљивих зову се *реченице*. (Тај технички термин *реченица* не треба побркати са хомонимним обичним граматичким термином.) Формула $\exists x(Px \wedge \forall y(Py \rightarrow y = x))$ је реченица, а формула $\exists x\, Px \wedge \forall y(Py \rightarrow y = x)$ није.

Место исказних променљивих у исказним формулама могли смо да супституишемо произвољне исказне формуле и добијемо као инстанце опет исказне формуле (в. одељак 1.7). На сличан начин, место *слободних* јављања индивидуалних променљивих у формулама неког језика првог реда можемо да супституишемо терме, не сасвим произвољне, да бисмо као инстанце добили опет формуле тог језика. Означићемо са $A^x{}_t$ супституциону инстанцу формуле A добијену супституцијом терма t место *свих* слободних јављања променљиве x у формули A, под условом да је задовољено следеће:

> Ако је терм t променљива z, онда нема слободних јављања променљиве x у формули A у некој потформули од A облика $\forall z\, B$ или $\exists z\, B$.

(Ако имамо сложене терме, онда антецеденс овог услова треба да гласи „Ако у терму t има слободних јављања променљиве z“.)

Ако овај услов прекршимо, онда место слободних јављања x у $\forall z\, B$ или $\exists z\, B$ добијамо везана јављања променљиве z у супституционој инстанци. То није дозвољено при супституцији место индивидуалних променљивих. Не смеју слободна јављања да се претворе у везана. Ево због чега.

Жеља нам је да са формула чије су инстанце увек истинити искази супституцијом пређемо на формуле чије су инстанце исто тако увек истинити искази. У вези са тим, видели смо у одељку 1.11 да се из таутологија супституцијом добијају таутологије. Ево примера који показује шта може да се деси ако услов прекршимо.

Свака супституциона инстанца формуле $\forall z(Pz \rightarrow Px) \rightarrow (Py \rightarrow Px)$ биће истинит исказ (в. следећи одељак 2.7). Ако супституишемо z место x, уз кршење услова, добијамо формулу $\forall z(Pz \rightarrow Pz) \rightarrow (Py \rightarrow Pz)$. У свакој импликацији која је инстанца добијене формуле, антецеденс, који је инстанца од $\forall z(Pz \rightarrow Pz)$, биће истинит исказ (за сваку индивидуу важи да ако пева, онда пева – сви који певају певају), али консеквенс, који је инстанца од $Py \rightarrow Pz$, не мора да буде истинит исказ (нек Марко пева, а Јанко не пева). Према томе, са $\forall z(Pz \rightarrow Px) \rightarrow (Py \rightarrow Px)$, чије инстанце су увек истинити искази, супституцијом смо прешли на $\forall z(Pz \rightarrow Pz) \rightarrow (Py \rightarrow Pz)$, чије инстанце нису увек истинити искази, и наша жеља из прошлог пасуса неће да буде задовољена.

Супституцијом се овде бавимо само у вези слободних јављања индивидуалних променљивих. Рекли смо раније (в. одељак 1.7) да су променљиве уопште у математици симболи везани за супституцију. У складу са тим, индивидуалне променљиве су стварно променљиве само у слободним јављањима. У њиховим везаним јављањима немамо променљиве у правом смислу речи.

2.7. Модели језика првог реда

Са формалним језицима првог реда добили смо синтаксу за предикатску логику првог реда. Сада прелазимо на њену семантику. Ту је главни појам модела који се заснива на оном што смо рекли у одељку 2.3.

Модел за неки језик првог реда састоји се прво од једног *непразног* скупа који зовемо *домен* модела. Осим тог домена, добијамо за сваку индивидуалну константу нашег језика по један објекат из домена модела који јој је приписан и за сваки n-арни предикатски симбол нашег језика по једну n-арну релацију на домену модела која му је приписана. Свакој индивидуалној константи приписује се тачно један објекат, а при томе може да се различитим индивидуалним константама припише исти објекат. Исто тако, сваком n-арном предикатском симболу приписује се тачно једна n-арна релација, а при томе може да се различитим n-арним предикатским симболима припише иста n-арна релација.

Бинарном предикатском симболу једнакости = приписујемо увек бинарну релацију на домену модела чији су чланови сви парови (a, a) за све објекте a из домена модела, и никакви други парови. Та релација је *релација једнакости* на домену модела.

Са тим приписивањима, у складу са терминологијом из одељка 2.3, добили смо нешто што ћемо звати једном *интерпретацијом* нашег језика првог реда у домену модела. Постоје различите интерпретације истог језика у истом домену (као што смо имали са унарним предикатом *је прост* у одељку 2.3).

Модел једног језика првог реда чине домен модела и једна интерпретација тог језика у том домену. То је дефиниција модела. (Ова се употреба речи *модел* не слаже сасвим са уобичајеном употребом, где се ради о обрасцу, узору или макети.)

При томе је важно да домен није празан скуп. Наш језик увек говори о неким објектима – увек говори о нечему. А никада ни о чему. То је претпоставка наше логике.

За реченице, формуле без слободних јављања индивидуалних променљивих, дефинисаћемо када су *истините у неком моделу*. За формуле које нису реченице, тј. са слободним јављањима индивидуалних променљивих, уводимо додатна приписивања објеката из домена индивидуалним променљивима. Та приписивања ћемо да назовемо *индивидуалне валуације*. Индивидуалном валуацијом приписујемо свакој индивидуалној променљивој тачно један објекат из домена, при чему је могуће да се исти објекат припише двема различитим променљивима. За формуле које нису реченице дефинисаћемо када су *истините у неком моделу за неку индивидуалну валуацију*. Ради се о једној индуктивној дефиницији.

У бази те индуктивне дефиниције, за атомске формуле које су реченице, тј. за атомске формуле без променљивих, неће бити тешкоћа. Таква формула $P\,t_1...t_n$ је истинита у моделу када је низ од n објеката приписаних интерпретацијом термима $t_1,..., t_n$ – ти терми су овде индивидуалне константе – члан n-арне релације која је приписана интерпретацијом предикатском симболу P.

У бази наше дефиниције, за атомске формуле $P\,t_1...t_n$ које нису реченице, тј. где међу термима $t_1,..., t_n$ има и индивидуалних променљивих – сва њихова јављања су слободна – рећи ћемо када су истините у неком моделу за неку индивидуалну валуацију. То се дефинише на исти начин као истинитост у моделу у прошлом пасусу. Разлика је само што у добијању низа од n објеката приписаних термима $t_1,..., t_n$ не учествује само интерпретација коју носи модел него и наша индивидуална валуација.

У индуктивном кораку наше дефиниције, за све сложене формуле чији је главни везник један од везника исказне логике следимо истиносне таблице за везник у питању, и на тај начин дефинишемо када је наша формула истинита у моделу, или пак истинита у моделу за неку индивидуалну валуацију. Конјункција је тако истинита када су оба конјункта истинита, дисјункција када је бар један дисјункт истинит, итд. Ново ће бити у том индуктивном кораку само ако се ради о формулама облика $\forall x\, A$ и $\exists x\, A$. Онда имамо следеће.

Реченица $\forall x\, A$ је истинита у моделу када је формула A истинита у моделу за *сваку* индивидуалну валуацију, а реченица $\exists x\, A$ је истинита у моделу када је формула A истинита у моделу за *неку* индивидуалну валуацију.

Пошто у формули A само променљива x може да има слободна јављања, нас у ствари занима шта наше индивидуалне валуације приписују тој променљивој, а за друге променљиве је свеједно шта им је приписано. Ради се дакле о томе који су објекти приписани променљивој x. У случају са $\forall x\, A$ спомињемо *свако* такво приписивање, а у случају са $\exists x\, A$ *неко* такво приписивање.

Ако променљива x нема слободних јављања у формули A, па је и A реченица – ту ситуацију наша синтакса дозвољава – онда нас не занима који су објекти приписани променљивој x индивидуалним валуацијама. У том случају реченица $\forall x\, A$ је истинита у моделу ако и само ако је реченица A истинита у моделу, и исто тако, реченица $\exists x\, A$ је истинита у моделу ако и само ако је реченица A истинита у моделу.

Сада следи један мало тежи део наше дефиниције који се тиче формула са $\forall x\, A$ и $\exists x\, A$ које нису реченице. Треба да кажемо када је једна таква формула истинита у моделу за неку индивидуалну валуацију v. Индивидуална валуација v приписује неке објекте индивидуалним промењивима које имају слободна јављања у формули $\forall x\, A$ или $\exists x\, A$, међу којима није промењива x. Шта v приписује промењивој x није битно. Када се будемо бавили истинитошћу формуле A узећемо у обзир све индивидуалне валуације које могу да се разликују од v по томе шта приписују промењивој x, а ни по чем другом се не разликују од v. Узимамо у обзир све такве индивидуалне валуације и тако пролазимо кроз све могуће објекте који могу да се припишу промењивој x. Сада дајемо тај тежи део наше дефиниције.

Формула $\forall x\, A$ је истинита у моделу за индивидуалну валуацију v када је формула A истинита у моделу за *сваку* индивидуалну валуацију која може да се разликује од v само по томе шта приписује промењивој x. Формула $\exists x\, A$ је истинита у моделу за индивидуалну валуацију v када је формула A истинита у моделу за *неку* индивидуалну валуацију која може да се разликује од v само по томе шта приписује промењивој x.

Ако промењива x нема слободних јављања у формули A, онда је формула $\forall x\, A$ истинита у моделу за неку индивидуалну валуацију ако и само ако је формула A истинита у моделу за ту индивидуалну валуацију, и исто тако, формула $\exists x\, A$ је истинита у моделу за неку индивидуалну валуацију ако и само ако је формула A истинита у моделу за ту индивидуалну валуацију. С тим је наша индуктивна дефиниција завршена.

Тешкоће ове дефиниције настају јер за реченице $\forall x\, A$ и $\exists x\, A$ формула A не мора да буде реченица. Зато не можемо да се ограничимо на реченице, и зато није довољно да говоримо о истинитости у моделу, него треба да говоримо још о истинитости у моделу *за неку индивидуалну валуацију*.

Тешкоће те дефиниције за реченице су мање ако имамо за сваки објекат a из домена нашег модела индивидуалну константу у језику којој је тај објекат приписан интерпретацијом модела; ту индивидуалну константу обележићемо са $\underline{a}$. Тада у индуктивној дефиницији истинитости реченица у моделу поступамо исто као и у претходној у свим случајевима осим у следећем. У индуктивном кораку, за реченицу $\forall x\, A$ рећи ћемо да је истинита у моделу када је за *сваки* објекат a из домена реченица $A^x_{\underline{a}}$ истинита у моделу, а за реченицу $\exists x\, A$ рећи ћемо да је истинита у моделу када је за *неки* објекат a из домена реченица $A^x_{\underline{a}}$ истинита у моделу. Можемо да поступимо на исти начин и са језицима где $\underline{a}$ није обавезно индивидуална константа, него име за наш објекат a које може да буде и сложени терм.

Ако се ограничимо на реченице, можемо да избегнемо тешкоће позивања на индивидуалне валуације и у случају да немамо за сваки објекат a из домена нашег модела индивидуалну константу у језику којој је тај објекат приписан интерпретацијом модела. За сваки објекат a у домену модела можемо да уведемо једно проширење нашег језика првог реда са новом индивидуалном константом $\underline{a}$. Ми широмо наш језик само са том једном индивидуалном константом за један објекат. За тај проширени језик имамо проширени модел који има исти домен као почетни и разликује се само по томе што шири интерпретацију тако да је индивидуалној константи $\underline{a}$ приписан објекат a. (Додавање индивидуалне константе $\underline{a}$ може да буде и сувишно, јер већ у почетном језику можемо да имамо индивидуалну константу којој интерпретација у старом моделу приписује објекат a. Наша дефиниција ће међутим да буде једноставнија ако дозволимо и то сувишно додавање.) Онда ћемо у индуктивној дефиницији истинитости реченица у моделу у свим случајевима да поступимо исто као и раније осим у следећем. У индуктивном кораку, за реченицу $\forall x\, A$ рећи ћемо да је истинита у моделу када је за *сваки* објекат a из домена реченица $A^x_{\underline{a}}$ из језика проширеног са индивидуалном константом $\underline{a}$ истинита у проширеном моделу, а за реченицу $\exists x\, A$ рећи ћемо да је истинита у моделу када је за *неки* објекат a из домена реченица $A^x_{\underline{a}}$ из језика проширеног са индивидуалном константом $\underline{a}$ истинита у проширеном моделу.

Место *није истинит* у моделу, кажемо, у складу са оним што смо имали у исказној логици, *лажан* у моделу.

2.8. Ваљане формуле

Интерпретације које су дате са моделима, и пратеће индивидуалне валуације, сличне су валуацијама из семантике исказне логике (в. одељак 1.10). Оно што у тој једноставнијој семантици одговара моделу је сама валуација. Домена нема, а свет двеју истиносних вредности, тј. двочлана Булова алгебра, се подразумева. Тај свет се подразумева и код модела приликом дефинисања истинитости у моделу (в. прошли одељак 2.7).

Формуле које у предикатској логици одговарају таутологијама исказне логике зову се *ваљане формуле*. За реченицу ћемо рећи да је ваљана формула када је истинита у сваком моделу, а за формулу која није реченица рећи ћемо да је ваљана формула када је истинита у сваком моделу за сваку индивидуалну валуацију.

Формула A која није реченица, и у којој само промењиве $x_1,\dots, x_n$ имају слободна јављања, ваљана је ако и само ако је ваљана реченица $\forall x_1\dots\forall x_n\, A$. То значи да смо, што се тиче ваљаности, у прошлом одељку могли да се ограничимо на дефинисање истинитости у моделу само за реченице, и да се не бавимо индивидуалним валуацијама које су тражиле формуле које нису реченице.

Било би практичније да се реч *таутологија* односи и на ваљане формуле, али, ето, не говори се тако. И таутологије и ваљане формуле имају за инстанце логичке истине, али с првима то су истине исказне логике, а с другима истине предикатске логике. Ове друге истине укључују и прве, јер све формуле неког језика првог реда које су супституционе инстанце таутологија биће ваљане.

Да бисмо испитали да ли је нека исказна формула таутологија имали смо поступак са истиносним таблицама (в. одељак 1.11) или чишћење (в. одељак 1.13) – а има још таквих поступака – који нам као нека машина после коначно много времена дају одговор на питање да ли је нека формула таутологија. То питање је одлучиво. За испитивање ваљаности формула не постоји, и не може у принципу да се пронађе, такав поступак који ће да нам да одговор на питање да ли је нека формула ваљана. То питање није одлучиво, и тај је резултат близак неким од највећих резултата логике. (То су Геделови резултати о којима смо нешто рекли у одељку 0.3, и о којима ћемо још нешто рећи у одељку 2.13.)

Непостојање таблица и неодлучивост су последица тога што има бесконачних модела, тј. модела са бесконачним доменима. Са коначним моделима, тј. моделима где су домени коначни, ми у ствари остајемо у исказној логици. Ево зашто.

Претпоставимо, као што смо то једног тренутка учинили у прошлом одељку 2.7, да имамо за сваки објекат a из домена нашег модела индивидуалну константу $\underline{a}$ у језику којој је тај објекат приписан интерпретацијом модела. У таквом моделу, који има n чланова (то n је природни број који мора да буде бар 1, јер домен не може да буде празан), реченица $\forall x\, A$ је истинита у моделу ако и само ако је истинита у моделу n-арна конјункција (в. одељак 1.16) чији су конјункти реченице $A^x{}_{\underline{a}}$, а реченица $\exists x\, A$ је истинита у моделу ако и само ако је истинита у моделу n-арна дисјункција чији су дисјункти реченице $A^x{}_{\underline{a}}$. Реченица $\forall x\, Px$ је истинита у моделу са доменом $\{a, b, c\}$ ако и само ако је у том моделу истинита конјункција $(P\underline{a} \wedge P\underline{b}) \wedge P\underline{c}$, а реченица $\exists x\, Px$ је истинита у том моделу ако и само ако је у њему истинита дисјункција $(P\underline{a} \vee P\underline{b}) \vee P\underline{c}$. Квантификаторе према томе можемо овде да сматрамо дефинисаним – можемо да сматрамо да су они скраћенице за конјункције или дисјункције.

За многе формуле међутим није тешко да се установи да јесу ваљане без обзира на величину домена, и сада ћемо да наведемо неке од тих ваљаних формула, при чему су A и B произвољне формуле, t је произвољан терм, z је индивидуална променљива која се не јавља у A, а C је произвољна формула у којој нема слободних јављања променљиве x:

$$\neg\, \forall x\, A \leftrightarrow \exists x \neg\, A, \qquad \neg\, \exists x\, A \leftrightarrow \forall x \neg\, A,$$
$$\forall x\, A \leftrightarrow \neg\, \exists x \neg\, A, \qquad \exists x\, A \leftrightarrow \neg\, \forall x \neg\, A,$$

$$\forall x\, A \rightarrow A^x{}_t, \qquad A^x{}_t \rightarrow \exists x\, A,$$
$$\forall x\, A \leftrightarrow \forall z\, A^x{}_z, \qquad \exists x\, A \leftrightarrow \exists z\, A^x{}_z,$$
$$\forall x\, C \leftrightarrow C, \qquad \exists x\, C \leftrightarrow C,$$

$$\forall x \forall y\, A \leftrightarrow \forall y \forall x\, A, \qquad \exists x \exists y\, A \leftrightarrow \exists y \exists x\, A,$$

$$\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow (\forall x\, A \wedge \forall x\, B), \qquad \exists x(A \vee B) \leftrightarrow (\exists x\, A \vee \exists x\, B),$$
$$(\forall x\, A \vee \forall x\, B) \rightarrow \forall x(A \vee B), \qquad \exists x(A \wedge B) \rightarrow (\exists x\, A \wedge \exists x\, B),$$

$$\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x\, A \rightarrow \forall x\, B),$$
$$\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x\, A \rightarrow \exists x\, B),$$

$$\exists x \forall y\, A \rightarrow \forall y \exists x\, A.$$

Формуле у првих осам редова у једној колони одговарају формулама у другој колони тако што се међусобно свуда замене $\forall$ и $\exists$, и исто тако $\wedge$ и $\vee$; у седмом реду се још обрће импликација. Сви ти односи су у вези са дуалношћу између конјункције и дисјункције (в. одељак 1.14). Та дуалност се тиче и квантификатора јер је универзални квантификатор конјунктивне природе, а егзистенцијални дисјунктивне, као што смо видели горе.

Еквиваленције у првом реду су квантификаторска верзија Де Моргanових закона (в. одељак 1.14). (Те две формуле и ваљана формула $\forall x\, A \rightarrow \exists x\, A$, која се може извести из формула у трећем реду помоћу правила транзитивности импликације из одељка 1.18, дају законе на којима се заснива такозвани квадрат старинске логике, у верзији тог квадрата где његови закони важе.)

Еквиваленције у другом реду се добијају из оних у првом реду преко правила контрапозиције (в. одељак 1.18) и закона двоструке негације (в. одељак 1.12). Те две формуле дају могућност да се универзални квантификатор дефинише преко егзистенцијалног и негације, и да се егзистенцијални квантификатор дефинише преко универзалног и негације. Те дефиниције одговарају дефиницијама конјункције преко дисјункције и негације и дисјункције преко конјункције и негације из одељка 1.15.

Еквиваленције у четвртом реду, које ћемо назвати *алфабетском заменом*, говоре да променљива из квантификаторског префикса заједно са јављањима те променљиве везаним квантификаторским префиксом може да се замени неком другом променљивом. Није битно да то буде баш то слово – може да се замени неким другим. Важно је само на којим се све местима налази.

Еквиваленције у петом реду говоре да квантификаторски префикси који не везују јављања неке променљиве могу да се изоставе.

Еквиваленције у шестом реду говоре да редослед којим се јављају квантификаторски префикси исте врсте није битан. Универзални може да замени место са универзалним и егзистенцијални са егзистенцијалним. За разнородне квантификаторске префиксе тај редослед је међутим битан, као што ћемо видети мало ниже поводом формуле у једанаестом реду. Сложеност неке формуле се у предикатској логици може мерити бројем смена квантификаторских префикса разних врста.

Формуле у седмом и осмом реду су разни закони дистрибутивности квантификатора над бинарним везницима.

Импликације у деветом и десетом реду, које су исто такви закони дистрибутивности, гарантоваће да и за ваљане формуле имамо једно тврђење о замени еквивалената као оно у одељку 1.12, с тим што то да су A и B еквивалентни значи сада да је еквиваленција $A \leftrightarrow B$ ваљана формула.

Импликација у једанаестом реду јесте ваљана формула, али обрнута импликација $\forall y \exists x\, A \rightarrow \exists x \forall y\, A$ није. Нека A буде $y < x$, и нека модел буде дат доменом природних бројева са интерпретацијом која бинарном предикату $<$ приписује бинарну релацију *мањи од*, што је скуп свих парова природних бројева (n, m) таквих да је n мање од m. Онда је у том моделу истинит антецеденс наше импликације, тј. реченица $\forall y \exists x\, y < x$ (за сваки природни број постоји један већи од њега), али није истинит консеквенс наше импликације, тј. реченица $\exists x \forall y\, y < x$ (не постоји природни број већи од свих природних бројева). У том моделу према томе није истинита наша реченица $\forall y \exists x\, A \rightarrow \exists x \forall y\, A$.

Овако, као у прошлом пасусу, може да се покаже да нека формула није ваљана. Ако се ради о реченици, као што је овде случај, нађе се модел у којем та реченица није истинита. Ако наша формула није реченица, онда треба да се још нађе и индивидуална валуација са којом реченица није истинита у моделу. Тај модел који показује да формула није ваљана зове се *контрамодел*.

2.9. Ограничени квантификатори

Претпоставимо да у нашем језику првог реда имамо бинарни предикатски симбол R. Онда се формуле облика $\forall x(xRt \rightarrow A)$ пишу скраћено $(\forall xRt)\, A$, а формуле облика $\exists x(xRt \wedge A)$ се пишу скраћено $(\exists xRt)\, A$. Предикатски симбол R је најчешће скуповна припадност $\in$, или $<$ (симбол за предикат *је мањи од*), или $\leq$ (симбол за бинарни предикат *је мањи или једнак*), или $>$ (симбол за предикат *је већи од*), или нешто слично. Префикси $(\forall xRt)$ и $(\exists xRt)$ се зову *ограничени квантификатори*.

Оно што у старинској логици одговара квантификаторима може да се реконструише ограниченим квантификаторима. „Сви Грци су људи" – један чувени пример исказа из старинске логике – имаће форму $(\forall x \in g)\, Hx$, где је g скуп Грка, а H унарни предикат *је човек*, или пак врло сличну форму $\forall x(Gx \rightarrow Hx)$, где је G унарни предикат *је Грк*. Старинска логика се ограничавала на нешто што ми данас сматрамо унарним предикатима, а што се тамо звало појмовима (в. одељак 2.1), и учила је да су у исказу „Сви Грци су људи" универзално спојени појам Грка и појам човека. У исказу „Неки Грци су људи", што за нас има форму $(\exists x \in g)\, Hx$, или $\exists x(Gx \wedge Hx)$, учило се да су ти појмови спојени егзистенцијално.

У аристотеловској традицији, дедукције у којима учествују искази тих двеју форми називају се *силогизми*. Другачије дедукције у тој традицији једва да су узимане у обзир. (То је дабоме страшно скучено.) Силогизми су пописивани и именовани. Њихова имена имају осим мнемотехничког и известан технички смисао – повезују разне силогизме. Главни пример силогизма, који носи лепо име *Барбара*, је дедукција са премисама „Сви Грци су људи" и „Сви људи су смртни" које дају закључак „Сви Грци су смртни". Та је дедукција преко правила за увођење конјункције (в. одељак 1.18) и модус поненса везана за ваљану формулу

$$(\forall x(A \to B) \wedge \forall x(B \to C)) \to \forall x(A \to C),$$

а та формула је везана за дистрибутивност универзалног квантификатора над конјункцијом и импликацијом (те дистрибутивности су у списку ваљаних формула у прошлом одељку 2.8) и за таутологију $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$.

За ограничене квантификаторе следеће две формуле, које одговарају формулама у првом реду списка ваљаних формула из прошлог одељка 2.8, су ваљане формуле:

$$\neg\, (\forall xRt)\, A \leftrightarrow (\exists xRt) \neg\, A, \qquad\qquad \neg\, (\exists xRt)\, A \leftrightarrow (\forall xRt) \neg\, A.$$

Овде је A произвољна формула. До прве од тих еквиваленција корак по корак можемо да стигнемо овако:

$$\begin{aligned} \neg\, \forall x(xRt \to A) \ &\leftrightarrow\ \exists x \neg\, (xRt \to A), && \text{јер је } \neg\, \forall x\, B \leftrightarrow \exists x \neg\, B \text{ ваљана формула,} \\ &\leftrightarrow\ \exists x\, (xRt \wedge \neg\, A), && \text{јер је } \neg\, (p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg\, q) \text{ таутологија,} \end{aligned}$$

и слично за другу.

Мада је формула $\forall x\, A \to \exists x\, A$ ваљана, формула $(\forall xRt)\, A \to (\exists xRt)\, A$ то не мора да буде. Контрамодел за ту формулу се лако добија из следећег.

Посматрајмо језик првог реда са унарним предикатским симболима H и P. Узмимо модел у чијем домену су сви живи људи. Интерпретација тог модела симболу H приписује скуп свих Хиперборејаца, тј. скуп свих становника најдаљег севера, којих у ствари нема; скупу H је према томе приписан празан скуп. Та интерпретација симболу P приписује скуп свих песимиста. У моделу који смо сада описали $\forall x(Hx \to Px)$ се чита „Сви Хиперборејци су песимисти". Та реченица је истинита у моделу јер је за сваку индивидуалну валуацију импликација $Hx \to Px$ истинита, будући да је антецеденс лажан. Исказ који каже да нешто припада празном скупу је увек лажан. Реченица $\exists x(Hx \wedge Px)$, која се чита „Неки Хиперборејци су песимисти", је међутим лажна у нашем моделу, јер је за сваку индивидуалну валуацију конјункција $Hx \wedge Px$ лажна, будући да је први конјункт лажан. Одатле закључујемо да је реченица $\forall x(Hx \rightarrow Px) \rightarrow \exists x(Hx \wedge Px)$ лажна у нашем моделу.

Када је P исто H, реченица $\forall x(Hx \rightarrow Hx)$ је ваљана формула. Реченица $\exists x(Hx \wedge Hx)$ међутим, која је еквивалентна са $\exists xHx$, није ваљана формула.

У свим моделима где се симболу H интерпретацијом приписује непразан скуп, реченица $\forall x(Hx \rightarrow Px) \rightarrow \exists x(Hx \wedge Px)$ ће међутим да буде истинита. Према томе, уз претпоставку да је у моделу истинита реченица $\exists x\, Hx$ та импликације ће да буде истинита. „Ако су сви Холанђани песимисти, онда су неки Холанђани песимисти“ је тачно. Тачно је да су неки Холанђани Холанђани, али не мора да буде тачно да су неки Хиперборејци Хиперборејци.

Аристотеловска логика је имала такве претпоставке о непразности. У предикатској логици се претпоставља само да је домен непразан (в. одељак 2.7), а узимамо у обзир унарне предикате који се интерпретирају празним подскуповима домена.

Посматрајмо сада језик првог реда са индивидуалном константом h, унарним предикатским симболом P и бинарним предикатским симболом $\in$. Узмимо модел у чијем домену су сви живи људи и сви скупови живих људи. Интерпретација тог модела константи h приписује скуп свих Хиперборејаца, тј. празан скуп, а симболу P скуп свих песимиста. Симболу $\in$ та интерпретација приписује релацију скуповне припадности. У тој релацији су сви уређени парови (a, b) такви да је a члан скупа b. У моделу који смо сада описали $(\forall x \in h)\, Px$ се чита као малопре $\forall x(Hx \rightarrow Px)$, тј. „Сви Хиперборејци су песимисти“, и та реченица, тј. $\forall x(x \in h \rightarrow Px)$, је истинита у моделу јер је за сваку индивидуалну валуацију импликација $x \in h \rightarrow Px$ истинита, будући да је антецеденс лажан. Реченица $(\exists x \in h)\, Px$, тј. $\exists x(x \in h \wedge Px)$, која се као и $\exists x(Hx \wedge Px)$ горе чита „Неки Хиперборејци су песимисти“, је међутим лажна у нашем моделу, јер је за сваку индивидуалну валуацију конјункција $x \in h \wedge Px$ лажна, будући да је први конјункт лажан. Одатле закључујемо да је реченица $(\forall x \in h)\, Px \rightarrow (\exists x \in h)\, Px$ лажна у нашем моделу, и тако смо добили контрамодел који смо горе тражили.

2.10. Једнакост

Треба напоменути у вези са знаком једнакости = да је он у предикатској логици првог реда резервисан за један бинарни предикат, и да је ту грешка писати га између израза неке друге граматичке категорије, исказа или предиката. Израз облика $A \rightarrow B = \neg A \vee B$ не може да буде формула објект-језика, мада у метајезику може таквим изразом да се забележи за шта је $\rightarrow$ скраћеница, када везник импликације дефинишемо преко дисјункције и негације.

Рекли смо у одељку 2.7 да бинарном предикатском симболу једнакости = приписујемо релацију једнакости на домену модела, тј. бинарну релацију на домену модела чији су чланови сви парови (a, a) за све објекте a из домена модела, и никакви други парови. У синтакси са две стране симбола = могу да стоје различите ствари, различити терми (могу да стоје и исти), али у семантици, у уређеним паровима који су чланови релације једнакости, на првом и на другом месту се налази иста ствар, исти објекат, никада различит. Разликовање синтаксне од семантичке тачке гледишта развејаће неке недоумице у које нас може довести околност да су искази облика $a = b$ информативни само ако су a и b *различити* изрази из граматичке категорије имена, а говоримо о томе да је нешто *исто*.

За предикат једнакости имамо следеће ваљане формуле за произвољне терме t, s и r, произвољну формулу A и терм w који није x (тј. у којем се x не јавља):

$$t = t,$$
$$t = s \to (A^x{}_t \to A^x{}_s),$$
$$A^x{}_w \leftrightarrow (\forall x = w)\, A, \text{ тј. } A^x{}_w \leftrightarrow \forall x(x = w \to A),$$
$$A^x{}_w \leftrightarrow (\exists x = w)\, A, \text{ тј. } A^x{}_w \leftrightarrow \exists x(x = w \wedge A)$$
$$t = s \to s = t,$$
$$(t = s \wedge s = r) \to t = r.$$

Са формулом у првом реду речено је да је једнакост *рефлексивна* бинарна релација, са формулом у претпоследњем реду речено је да је *симетрична*, а са формулом у последњем реду речено је да је *транзитивна*.

Прва и последња формула су истините у моделу природних бројева, и других бројева, уз уобичајену интерпретацију и када = заменимо свуда симболом ≤, па добијемо $t \leq t$ и $(t \leq s \wedge s \leq r) \to t \leq r$. Релација *мањи или једнак* којом се тај предикат интерпретира је рефлексивна и транзитивна, али није симетрична – није увек истинито $t \leq s \to s \leq t$. Релације *мањи* и *већи* су само транзитивне, а нису ни рефлексивне ни симетричне.

Бинарна релација на неком скупу која је рефлексивна, симетрична и транзитивна назива се *релацијом еквиваленције*. На истом скупу може да буде разних релација еквиваленције. Релација еквиваленције на скупу људи различита од једнакости је бинарна релација којом се интерпретира нпр. бинарни предикат *је исте висине као*, или нпр. бинарни предикат *је рођен исте године као*. Од свих релација еквиваленције на неком скупу релација једнакости је најмања – она је подскуп свих тих релација еквиваленције, њу чини пресек свих тих релација.

Још једна ваљана формула за предикат једнакости и произвољан унарни предикат P је

$$t = s \to (Pt \to Ps),$$

која је инстанца формуле $t = s \to (A^x{}_t \to A^x{}_s)$ на списку горе. Обрнута импликација $(Pt \to Ps) \to t = s$ није ваљана (нека је t Марко а s Јанко, и нека Марко не пева). У предикатској логици другог реда, где, уз претпоставку да је P унарна предикатска променљива, имамо квантификаторе $\forall P$ и $\exists P$, биће међутим увек истинито

$$\forall P(Pt \to Ps) \to t = s.$$

Зато што из $\forall P(Pt \to Ps)$ можемо да закључимо $t = t \to t = s$, што уз $t = t$ са модус поненсом даје $t = s$. (Из $\forall P(Pt \to Pt) \to t = t$, што је инстанца наше импликације, уз логичку истину $\forall P(Pt \to Pt)$ са модус поненсом добијамо $t = t$.) На еквиваленцији

$$t = s \leftrightarrow \forall P(Pt \to Ps)$$

заснива се дефиниција једнакости коју је предложио Лајбниц (о коме смо говорили на крају одељка 0.2).

Егзистенцијални квантификатор $\exists x$ може да се чита *за бар један објекат x* (или *за бар једно x*, или *постоји бар једно x тако да*). Уз помоћ једнакости може да се дефинише квантификатор $\exists! x$, који се чита *за тачно један објекат x*. Израз $\exists! x\, A$ биће формула

$$\exists x(A \wedge \forall y(A^x{}_y \to y = x)).$$

2.11. Формални системи за предикатску логику

Један аксиоматски формални систем за предикатску логику првог реда добија се када узмемо као аксиоме прво све инстанце таутологија са списка из одељка 1.17, при чему су те инстанце добијене супституцијом формула језика првог реда у којем радимо место слова p, q и r. Поред тих исказних аксиома, тј. аксиома које нам даје исказна логика, имамо као додатне предикатске аксиоме све формуле следећих облика:

$$\forall x\, A \to A^x{}_t,$$
$$A^x{}_t \to \exists x\, A,$$

$$t = t,$$
$$t = s \to (A^x{}_t \to A^x{}_s).$$

Место аксиома у последња два реда, које се тичу једнакости, можемо узети као аксиоме све формуле облика $A^x{}_w \leftrightarrow (\forall x = w)\, A$ или облика $A^x{}_w \leftrightarrow (\exists x = w)\, A$ за терм w

који није x, тј. у којем се x не јавља. (Све те формуле смо спомињали као ваљане формуле у одељку 2.8 и прошлом одељку 2.10.)

Као правила имамо, као и раније, модус поненс:

Из премиса $A \rightarrow B$ и A закључи B,

и следећа додатна *квантификаторска правила*, где је C формула у којој нема слободних јављања променљиве x:

Из $C \rightarrow A$ закључи $C \rightarrow \forall x\, A$;

Из $A \rightarrow C$ закључи $\exists x\, A \rightarrow C$.

С тим је завршена дефиниција нашег формалног система за предикатску логику првог реда.

Доказ у том формалном систему се дефинише исто као и доказ у формалном систему за исказну логику у одељку 1.17 осим што се поред модус поненса спомињу и квантификаторска правила. Теорема је као и раније формула у корену дрвета које је доказ, формула за коју постоји доказ.

Да би се сачувала теорема дедукције у доказима из хипотеза за овај формални систем не сме да се дозволи неограничена примена квантификаторских правила. Она треба да се ограниче на случајеве када премиса једног од тих правила нема изнад себе у дрвету доказа хипотезу са слободним јављањима променљиве x. (Са сличним ограничењима треба да се формулишу и правила за један систем природне дедукције за предикатску логику првог реда.)

Та ограничења су везана за услов који је наметнут за јављања променљиве x у формули C у универзалном квантификаторском правилу горе. Закључујемо $\forall x\, A$ ако смо установили да A важи за *произвољну* променљиву x. Да би та променљива била произвољна, не треба да постоје никакве претпоставке за њу, а те претпоставке су или у антецеденсу C или у хипотезама од којих премиса $C \rightarrow A$ зависи. Зато се забрањују слободна јављања променљиве x у тим претпоставкама. Везана јављања те променљиве се не рачунају, јер то и није променљива у правом смислу речи, а алфабетском заменом (в. одељак 2.8) може и да се замени неком другом променљивом.

Услов који је наметнут за јављања променљиве x у формули C у егзистенцијалном квантификаторском правилу је сличне, само дуалне, природе. Јављање произвољне променљиве у консеквенсу, или у закључку, као да је везано универзалним квантификатором, а јављање произвољне променљиве у антецеденсу, или у премисама, или у хипотезама, као да је везано егзистенцијалним квантификатором. *Произвољан* у закључку значи *сваки*, а у претпоставци *неки*.

Наш формални систем за предикатску логику првог реда је *потпун* у смислу да се његове теореме подударају са ваљаним формулама. Скуп теорема и скуп ваљаних формула су један исти скуп формула. Ова потпуност проширује потпуност формалних система за исказну логику из одељка 1.19 тако што је термин *таутологија* замењен термином *ваљана формула*. Имамо дакле следеће тврђење:

Потпуност. За сваку формулу важи да је теорема ако и само ако је ваљана.

Није тешко да се докаже импликација слева удесно. Провери се да су аксиоме ваљане формуле, и да правила формалног система чувају ваљаност. Пуно тога, све што се тиче исказне логике, већ је урађено.

Теже је да се докаже импликација здесна улево, и то је сада доста теже да се докаже него у исказном случају. Не можемо овде тиме да се бавимо. Рећи ћемо само да се ради о једном од првих великих резултата логике. (Доказао га је Гедел, као што смо рекли у одељку 0.3.) Тај резултат је постао узор за многе друге резултате потпуности, који играју централну улогу у логици. О томе смо нешто већ рекли на крају одељка 1.19.

После потпуности, одлучивост би била следећи најважнији проблем којим се баве логичари. Рекли смо већ у одељку 2.8 да није одлучиво питање да ли је нека формула ваљана. На основу потпуности закључујемо да није одлучиво ни питање да ли је нека формула теорема нашег формалног система за предикатску логику првог реда.

За поједине врсте формула питање да ли је нека формула ваљана, или питање да ли је нека формула теорема, је међутим одлучиво. Ако у нашем језику првог реда имамо само унарне предикате, поред бинарног предиката једнакости, добијамо одлучивост. Довољно је међутим да имамо један једини бинарни предикат, без једнакости, па да се поново појави неодлучивост.

У исказној логици семантичка средства, истиносне таблице, омогућују на најбољи начин да се одговори на питање да ли нека формула даје увек логичке истине, тј. да ли је таутологија или теорема. Формални системи, тј. синтаксна средства систематисања логичких истина, интересантни су у исказној логици за разумевање дедукције, а не толико за препознавање логичких истина. У предикатској логици, где нема одлучивости за исту врсту питања, формални системи су значајни и за препознавање логичких истина. Има семантичких средстава која то чине отприлике исто толико добро (она се зову *таблои*, и нису веома далеко од синтаксе), али не и оних која би то чинила много боље.

2.12. Функције и операције

Појам функције је један од најзначајнијих математичких појмова. Он ће нам с једне стране помоћи да прецизирамо наше семантичке дефиниције, а с друге стране преко њега ћемо да дефинишемо шта су то операције, које је природно увести у језике првог реда.

За бинарну релацију f између скупова X и Y каже се да је *функција* из X у Y када за свако a из X постоји тачно једно b из Y тако да је уређени пар (a, b) у f. То се може записати и формулом $(\forall x \in X)(\exists! y \in Y)(x, y) \in f$, тј.

$$\forall x(x \in X \to \exists! y(y \in Y \wedge (x, y) \in f)),$$

где је $\exists! y$ дефинисано као на крају одељка 2.10.

За функције f, не пише се $(a, b) \in f$ (ни afb, ни fab), него је обичај да се место тога пише $f(a) = b$. Када $f(a) = b$ каже се да је b *вредност* функције f за *аргумент* a, и да f *приписује* објекту a објекат b. Место *функција* каже се још и *пресликавање*.

Пример функције из скупа чији су чланови сви живи људи у скуп природних бројева је функција која сваком човеку приписује колико је година стар.

Када смо до сада говорили у семантици исказне и предикатске логике о *приписивању* радило се о функцијама. Валуације у семантици исказне логике су функције из скупа исказних формула у скуп двеју истиносних вредности. Интерпретације у моделима су функције из скупа индивидуалних константи у домен модела, и из скупа n-арних предикатских симбола у скуп n-арних релација на домену модела. Индивидуалне валуације су функције из скупа индивидуалних промењљивих у домен модела.

Посебна врста функција су *операције*. Функције из X^n у X, где је $n \geq 0$, су *n-арне операције* на скупу X (дефиниција скупа X^n је у одељцима 2.2 и 2.3). Једна n-арна операција на X је подскуп од X^{n+1}, и према томе посебна врста $(n+1)$-арне релације на X.

Пошто је X^0 једночлани скуп $\{*\}$ (в. одељак 2.3), једна нуларна операција на X приписује објекту $*$, јединому члану скупа $\{*\}$, неки члан скупа X. Таква операција може да се поистовети са тим чланом скупа X који приписује објекту $*$. После тог поистовећивања, нуларне операције на X би биле просто чланови скупа X.

Један скуп заједно са неким операцијама на њему може да се назове *алгебром* (та реч има и друга, специфичнија, значења у математици; њом се именује и читава једна област математике). У том смислу је алгебра двочлана Булова алгебра чији су чланови $\{*\}$ и празан скуп са бинарним операцијама пресека и уније и унарном операцијом комплемента (в. одељак 1.10).

Језици првог реда којима смо се до сада бавили се често допуњују симболима за операције. Ако нпр. желимо да имамо језик првог реда да бисмо њиме говорили о бројевима, очекујемо да у њему нађемо симболе, знаке, + и · који треба да буду интерпретирани бинарним операцијама сабирања и множења на домену модела. Језици без операцијских симбола, само са предикатима, у принципу су довољни – то што се изражава уз помоћ операција може да се изрази и без њих, само са предикатима. Често је међутим природније имати језик са операцијским симболима.

У присуству операцијских симбола, појављују се сложени терми, који нису прости симболи. Сложени терми се као и формуле дефинишу индуктивно. Разлика је само што су формуле граматичке категорије исказа, а терми граматичке категорије имена. Један сложени терм је нпр. $((x \cdot 2) + (3 + z)) \cdot ((x \cdot 2) + y)$. Као и код формула, у сложеним термима изостављамо најспољашњије заграде (а често се изостављају и заграде везане за $\cdot$ и неке друге заграде). Све природне бројеве можемо да именујемо термом 0 и следећим сложеним термима: 0+1, (0+1)+1, ((0+1)+1)+1 итд.

У одељку 1.10 видели смо да у двочланој Буловој алгебри може да се узме да је у скупу истиносних вредности $\{1, 0\}$ члан 1 скуп $\{*\}$, а 0 празан скуп. Конјункцији у тој семантици одговара бинарна операција пресека на скупу $\{1, 0\}$.

На крају тог одељка споменули смо и један друкчији приступ семантици, који није буловски – не бави се тврђењем и истиносним вредностима, него дедукцијама. Дедукције су као функције по томе што и једне и друге иду из нечега у нешто. У том друкчијем приступу семантици, конјункцији би опет одговарала једна скуповна операција, али не пресек, него Декартов производ (в. одељак 2.2). Ако у $p \wedge q$ узмемо да су p и q скупови, а $\wedge$ је Декартов производ $\times$, онда следећа два правила дедукције:

Из $p \wedge q$ закључи p;

Из $p \wedge q$ закључи q,

одговарају функцији прве пројекције π_1 из $p \times q$ у p и функцији друге пројекције π_2 из $p \times q$ у q. За аргумент (a, b) из $p \times q$ функција π_1 има вредност a, а функција π_2 вредност b. Правило дедукције

Из p и q закључи $p \wedge q$

одговара спаривању, које од неког a из p и неког b из q прави уређени пар (a, b) из $p \times q$. (Помоћу спаривања од функције f из скупа r у p и функције g из r у q правимо функцију $\langle f, g\rangle$ из r у $p \times q$ тако да за c из r имамо $\langle f, g\rangle(c) = (f(c), g(c))$.)

2.13. Формална аритметика

Сада уводимо један језик првог реда којим ћемо да говоримо о природним бројевима. У њему имамо индивидуалну константу 0, која ће да буде интерпретирана бројем нула, симбол s за унарну операцију, који ће да буде интерпретиран операцијом узимања наследника, тј. додавања јединице $+1$, и симбол $+$ за бинарну операцију, који ће да буде интерпретиран операцијом сабирања. У том језику нема других предикатских симбола осим једнакости. Све природне бројеве можемо да именујемо термом 0 и следећим сложеним термима тог језика: $s0$, $ss0$, $sss0$ итд.

Онда уводимо формални систем *аритметике сабирања* тако што на формални систем за предикатску логику првог реда у овом језику (в. одељак 2.11) додамо следеће реченице као нове аксиоме:

$$\forall x \forall y (sx = sy \rightarrow x = y),$$
$$\forall x \neg\, 0 = sx,$$
$$\forall x \; x + 0 = x,$$
$$\forall x \forall y \; x + sy = s(x + y),$$
$$\forall z_1 ... \forall z_n ((A^x{}_0 \wedge \forall x (A \rightarrow A^x{}_{sx})) \rightarrow \forall x\, A),$$

за сваку формулу A у којој само променљиве x, $z_1,..., z_n$ могу да имају слободна јављања. Овде је $n \geq 0$; ако је $n = 0$, онда бришемо квантификаторе $\forall z_1 ... \forall z_n$. Ти универзални квантификатори везују све преостале променљиве и дају реченице.

Прва аксиома каже да различити бројеви имају различите наследнике (импликација иза квантификаторских префикса је еквивалентна са формулом $\neg\, x = y \rightarrow \neg\, sx = sy$ по законима контрапозиције; в. одељак 1.18). Друга аксиома каже да нула није ничији наследник (та аксиома је еквивалентна са $\neg \exists x \; 0 = sx$).

Трећа и четврта аксиома су једна индуктивна дефиниција сабирања. Прво, у трећој аксиоми, која је база те дефиниције, кажемо шта је резултат сабирања са нулом, па онда у четвртој аксиоми, која је индуктивни корак те дефиниције, дефинишемо сабирање са наследником од y преко сабирања са y.

Аксиома у последњем реду има бесконачно много, јер нееквивалентних формула које могу да се ставе место A има бесконачно много. Те аксиоме се зову *аксиоме индукције*, и њима претпостављамо математичку индукцију (в. одељак 1.7). У једној таквој аксиоми, у импликацији иза $\forall z_1 ... \forall z_n$, први конјункт антецеденса $A^x{}_0$ је база индукције, која каже да нешто важи за нулу, други конјункт антецеденса $\forall x (A \rightarrow A^x{}_{sx})$ је индуктивни корак, који каже да ако нешто важи за x, онда важи и за наследника од x, и најзад, консеквенс $\forall x\, A$ је закључак добијен применом математичке индукције.

Правила тог формалног система су иста као правила формалног система за предикатску логику првог реда, а шта су докази и шта су теореме је дефинисано на исти начин. Формални системи као што је овај који смо увели зову се *теорије првог реда*, или просто *теорије*.

Аритметика сабирања је потпуна теорија, у смислу да је нека реченица теорема те теорије ако и само ако је истинита у моделу природних бројева, где се 0, s и + интерпретирају као што је речено у првом пасусу овог одељка. Та теорија је и одлучива; одлучиво је питање да ли је нешто теорема те теорије.

Теорија коју ћемо звати *формална аритметика* (она се често зове и *Пеанова аритметика*, што долази од Giuseppe Peano, а заслужан је и Richard Dedekind) дефинише се као аритметика сабирања са следећим додацима. У језику имамо један додатни симбол $\cdot$ за бинарну операцију, који ће да буде интерпретиран операцијом множења. Имамо две нове аксиоме:

$$\forall x\ x \cdot 0 = 0,$$
$$\forall x \forall y\ x \cdot sy = (x \cdot y) + x,$$

које су једна индуктивна дефиниција множења. У првој новој аксиоми, која је база те дефиниције, кажемо шта је резултат множења са нулом, па онда у другој новој аксиоми, која је индуктивни корак те дефиниције, дефинишемо множење са наследником од y преко множења са y и сабирања.

Формална аритметика је непотпуна теорија у смислу да постоји реченица таква да ни она ни њена негација нису теореме. Гедел (кога смо споменули у одељку 0.3) је дао главни део доказа да та непотпуност важи ако је формална аритметика непротивречна, тј. ако у њој није теорема и нека формула и њена негација. Генцен (кога смо исто споменули у одељку 0.3) је доказао да је формална аритметика непротивречна. Формална аритметика је и неодлучива; питање да ли је нешто теорема те теорије није одлучиво.

Пошто је формална аритметика непотпуна, постоји реченица истинита у моделу природних бројева (са стандардном интерпретацијом за 0, s, + и $\cdot$) која није теорема формалне аритметике. Гедел је нашао једну такву реченицу тако што је успео да формална аритметика кодирањем преко природних бројева говори о својој сопственој синтакси. Геделова реченица каже за саму себе да није теорема у формалној аритметици.

Прва помисао је да ту реченицу треба додати као нову аксиому да бисмо добили потпуност. На основу прве Геделове теореме о непотпуности, ни нова теорија међутим неће бити потпуна, под претпоставком да је непротивречна. На основу тог резултата, важи да ниједан непротивречан формални систем који обухвата формалну аритметику не може да буде потпун. За њега ће се направити једна нова реченица Геделовог типа, која каже за саму себе да није теорема у том формалном систему. И та нова реченица неће бити теорема проширеног система.

Друга Геделова теорема о непотпуности каже да се место тих реченица које говоре о својој недоказивости може да узме реченица која каже да је формални систем о којем је реч непротивречан. Ни те друге реченице неће бити теореме. Непротивречност непротивречног формалног система који обухвата формалну аритметику не може да се докаже у том систему. У нечем морамо да пређемо границе формалног система. Генценов доказ непротивречности формалне аритметике, који смо споменули горе и у одељку 0.3, заснива се на индукцији јачој него што је индукција претпостављена у аксиомама формалне аритметике – тиче се једне бесконачности која превазилази бесконачност природних бројева. Те јаче индукције нема у формалној аритметици.

Ови Геделови резултати су велики резултати не само логике, него математике уопште. Као још неки велики математички резултати, они кажу да нешто не може да се уради. Те врсте је један од првих великих резултата математике, до којег су дошли Питагорини следбеници, који каже да квадратни корен из 2 није рационалан број (в. одељак 1.18). Са тим резултатом грчке математике улазимо у један нови свет бројева. Те врсте је и Канторов резултат (Кантора, оца теорије скупова, споменули смо у одељку 0.3) да тачке на правој не могу да се преброје, тј. да не постоји функција из скупа тих тачака у скуп природних бројева таква да се различитим тачкама приписују различити бројеви. Са тим Канторовим резултатом улазимо у свет бесконачности већих него што је бесконачност природних бројева.

Геделови резултати о непотпуности говоре о ограничености машина. Под машинама овде подразумевамо апстрактне математичке машине, као што су Тјурингове машине (споменуте у одељку 0.3), које бесконачно превазилазе моћи машина из физичког света. Ниједна машина није у стању да произведе све истине аритметике.

2.14. Теорија скупова

Језик првог реда којим треба да говоримо о скуповима имаће поред једнакости само још један бинарни предикатски симбол, и ништа више осим онога што тражи предикатска логика првог реда. Тај предикатски симбол је симбол $\in$, који се интерпретира релацијом припадности (в. одељак 2.2). Запањујуће је да је тај језик довољан да се у њему дефинише апсолутно *све* о чему говоримо у математици.

Могло би да се очекује да ће аксиоме теорије скупова да буду реченице следећих облика:

компрехензија $\forall z_1 ... \forall z_n \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow A)$,
екстензионалност $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$,

за сваку формулу A у којој само промењиве x, z_1,..., z_n могу да имају слободна јављања. Исто смо имали и за аксиоме индукције у формалној аритметици у прошлом одељку 2.13, и претпоставке за n су исте као тамо.

У компрехензији квантификатор $\exists y$ служи да се каже да постоји скуп у којем су тачно они објекти x за које важи A. Тај скуп, који може да се означи изразом $\{x : A\}$, или $\{x \mid A\}$, обухвата те објекте (*компрехензија* овде значи *обухватање*). У формули A видимо унарни предикат добијен брисањем јављања промењиве x. Том предикату интерпретација приписује једну унарну релацију, тј. један скуп, и то је скуп $\{x : A\}$. Речено старинским језиком, у тај скуп стављамо све оне објекте који имају *својство* означено предикатом добијеним из A. Модернијим језиком се каже да смо из формуле A *апстраховали* скуп $\{x : A\}$. Ако занемаримо квантификаторске префиксе $\forall z_1 ... \forall z_n$, компрехензија гласи $\forall x(x \in \{x : A\} \leftrightarrow A)$.

Екстензионалност каже да за различите скупове мора да постоји члан из једног који није у другом. Скуп је потпуно одређен својим члановима. Према томе, за неки скуп a имамо једнакост $\{x : x \in a\} = a$, која је упоредива са компрехензијом како смо је записали на крају прошлог пасуса. Екстензионалност тражи екстензионална тачка гледишта о којој смо говорили у одељку 2.3.

Из компрехензије добијамо међутим противречност. Нека A у компрехензији буде формула $\neg x \in x$, и нека a буде скуп о чијем постојању говори квантификатор $\exists y$ у том случају компрехензије, тј. скуп $\{x : \neg x \in x\}$. Имамо дакле реченицу $\forall x(x \in a \leftrightarrow \neg x \in x)$, и одатле закључујемо $a \in a \leftrightarrow \neg a \in a$. Исказна формула $p \leftrightarrow \neg p$ је међутим контрадикција, а $\neg(p \leftrightarrow \neg p)$ је таутологија, па имамо и реченицу $\neg(a \in a \leftrightarrow \neg a \in a)$. Одатле добијамо да је наша теорија противречна.

Извођење противречности из компрехензије се назива *Раселовим парадоксом* (по филозофу и логичару Раселу поменутом у одељку 0.3). Парадокс је то што нешто неприхватљиво следи из уверења које се изгледа намеће – уверења да, као што смо рекли горе, иза сваког својства стоји скуп, тј. да из сваке формуле може да се апстрахује скуп. Раселов парадокс показује да то уверење, формализовано у компрехензији, треба одбацити.

Када се одбаци компрехензија она се замењује њеним посебним случајевима за које влада уверење да не могу да воде у противречност. Са тим и још неким другим аксиомама добија се једна теорија првог реда која се зове *Цермело-Френкелова теорија скупова* – скраћено ZF (што долази од Ernst Zermelo и Abraham Fraenkel).

У тој теорији и неким њеним проширењима може да се докаже скоро све што важи у математици, али не баш све. Све те теорије шире формалну аритметику

– у њима формална аритметика може да се дефинише – и зато на све њих могу да се примене Геделови резултати о непотпуности (в. прошли одељак 2.13). (С тим што сада немамо као што смо имали за формалну аритметику доказ непротивречности као што је Генценов.)

Раселов парадокс је исте врсте као један парадокс који потиче још из древне Грчке и зове се *парадокс лажљивца*. У најједноставнијој верзији тог парадокса неко изговара следећу реченицу која изгледа као исказ: „Ово што ја сада кажем није истина“, или још простије „Ја сада лажем“. Онда се као код Раселовог парадокса добије да је та реченица истинита ако и само ако није истинита. Та еквиваленција је међутим инстанца контрадикције $p \leftrightarrow \neg p$, па не може да буде истинита.

Оно што је у парадоксу лажљивца неприхватљиво, збуњујуће, то је да лажљивчева реченица „Ја сада лажем“ не може да буде ни истинита ни лажна. Та реченица је изгледала као исказ, а у ствари испадне да није исказ, јер не може да буде ни истинита ни лажна.

Уверење да је то исказ наметало нам се можда зато што сличне реченице, као нпр. „Ја сада говорим српски“, не воде противречности. Нису парадоксалне као лажљивчева. Геделова реченица коју смо споменули у прошлом одељку 2.13, која каже за саму себе да није теорема у формалној аритметици, је једна од тих непарадоксалних реченица сличних лажљивчевој.

Из Геделових резултата о непотпуности следи да ако људски ум производи математичке истине као формални систем, ако он ради као машина, онда постоје математичке истине до којих он неће никада доћи. Постоје математички проблеми чија формулација није нешто недостижно, али решење јесте. Ко оптимистички, али и сасвим разумно, сматра да је људски ум довољно моћан да реши сваки математички проблем који је у стању и да постави, закључиће да људски ум није машина.

Не треба да се закључи из последња два одељка да логика служи највише томе да се уз њену помоћ дође до формалне аритметике и Цермело-Френкелове теорије скупова. Те две теорије су значајне, и зато смо се њима бавили, али велики број, већи број, значајних истраживања у логици је данас на другим странама, којима воде одељци у овој књизи пре последња два.

2.15. Утицај логике

Математичаре је логика углавном остављала равнодушним све док сами нису узели да је изучавају у XIX веку, и требало је да прође отприлике један век док се утицај логике није проширио на опште математичко образовање. Почетком друге половине XX века нешто из логике је стало да се учи на часовима математике у најнижим разредима основне школе. Радило се о неким појмовима везаним за скупове, као што су пресек, унија и комплемент, и неким најједноставнијим чињеницама везаним за њих, а то се не тиче толико теорије скупова колико Булових алгебри и логике (в. одељак 1.10).

Језик теорије скупова, који подразумева логички језик, не нужно формалан, али инспирисан формалним логичким језиком, постао је језик којим сви математичари говоре, боље или лошије. Логика је на математику утицала тим језиком више и шире него својим резултатима. Развој и утицај логике пратили су развој читаве математике током XX века, развој који је достигао неслућене размере. Њиме тај век може да се дичи кад се пореди са свим претходним вековима. (У неком другом погледу може да се срами.)

Утицај логике још је већи и свеобухватнији у рачунарству, које је крајем XX века подарило човечанству средства исто тако неслућене моћи. О том другом утицају речено је већ нешто у првом одељку 0.1. И ту се утицај логике осећа највише у области језика. Програмски језици, тј. вештачки језици направљени да би се комуницирало са рачунарима, у извесном смислу су потомци логичких вештачких језика, сродних формалним језицима којима смо се бавили у овој књизи.

Ако се статус *праве* науке, у најстрожијем смислу те речи, стиче тек увођењем математике у неку област људског знања (в. почетак одељка 0.2), онда је лингвистика, општа наука о језику, кренула путем праве науке средином XX века, и то пре свега у области синтаксе са радовима Чомског (Noam Chomsky). И ту је утицај логике био велики, и он се дабоме огледа у области језика. Граматике у савременим синтаксним теоријама, код Чомског и још више код неких других, у сродству су са индуктивним дефиницијама формалних логичких језика. Утицај логике на лингвистику осећа се и у области семантике, али је он ту дао мање несумњивих резултата.

Утицај логике на психологију постоји, али је мањи него што би могло да се очекује. За то су више криви логичари него психолози. Утицај је могао да буде јачи у психолошким истраживањима која се тичу сазнавања, а пре свега закључивања, дедукције, да у логичким уџбеницима није доминирала аксиоматска врста формалних система, са пуно аксиома, а мало правила (в. одељак 1.17). Ти формални системи мало и на неодговарајући начин говоре о дедукцијама, и психолози нису криви што нису могли много да извуку за своје експерименте из тих логичких уџбеника. Ствари су изгледа стале да се мењају крајем XX века, када је у логичким уџбеницима природна дедукција почела да бива боље заступљена (в. одељак 1.18).

У првом одељку 0.1 споменули смо да се реторика доводи у везу са речју *логика*, али је ту утицај старинске логике већи него утицај савремене. Реторика се на средњовековним универзитетима учила у тривијуму заједно са логиком (као што смо споменули у одељку 0.2). После је била избачена са универзитета, да би се једна њена верзија сасвим скоро поново вратила на универзитет под именом *маркетинг*. Ради се дабоме о вештини, коју не треба никако бркати са науком.

Блиско реторици у старинској логици је пописивање и именовање логичких грешака и грешака у аргументацији. (То је нешто што се тиче и психологије.) Аргументација не мора да се заснива на дедукцији, а грешке у аргументацији, чак и када је дедуктивна, нису нужно логичке грешке. Ако се испостави да сам дошао до неког закључка тако што сам га већ претпоставио, то је грешка у аргументацији која није логичка грешка. Дедукција закључка p из премисе p је потпуно исправна – то је чак праисконска дедукција (која је у вези са таутологијом $p \to p$) – али са том дедукцијом нећемо да уверимо неког у истинитост исказа p. Оно чиме се ова књига бави тиче се логичких грешака. Када смо оивичили то што је тачно, грешке су оста-ле са друге стране, али у савременој логици то није неко посебно поглавље, као што се иначе у уџбеницима из математике грешкама не посвећују посебна поглавља.

Остаје нам да кажемо нешто о утицају логике на филозофију. При томе нас се неће тицати Хегел (Georg Wilhelm Friedrich Hegel), који логиком није звао старинску аристотеловску логику – једину коју је могао да познаје, будући да је умро у првој половини XIX века – него је тако назвао велики део своје филозофије. Та филозофија, за разлику од логике, и старинске и савремене, прихвата противреч-ности. На основу таутологије $(p \wedge \neg p) \to q$ (која важи и у интуиционистичкој логи-ци), ако тврдимо противречност, онда можемо да тврдимо било шта. И заиста, у Хегеловој филозофији има веома далекосежних закључака. И други су писали у XIX и XX веку у Хегеловом духу, или на сличан начин, али нас се не тиче то, него нешто друго.

Утицај логике на филозофију никада није био већи него у XX веку. И раније су се филозофи пуно клели у логику, али је старинска логика била исувише слабаш-на да им много помогне. Тек је логика препорођена у математици повела филозофи-ју новим путевима. Као што се утицај логике у математици и у лингвистици испо-љава преко језика, тако је и у филозофији. Један велики део филозофије XX века окренуо се под утицајем савремене логике језику као кључу за решавање филозоф-ских проблема.

У првој половини века, поверење у логичке формалне језике комбиновано је са признавањем чулног опажања и природних наука као искључивим извором знања. Филозофски проблеми требало је да буду просто елиминисани, јер у савршe-ном језику науке неће моћи ни да се формулишу. (Таква гледишта имали су рани Витгенштајн и логички позитивисти.) Као реакција на то дошло је средином века до неповерења у формалне језике и ослањања на обичан језик, опет у настојању да се елиминишу филозофски проблеми. Осим тврђења и именовања, на које се логика ограничила, узимају се у обзир и друге употребе језика. (Таква гледишта имали су каснији Витгенштајн и оксфордски филозофи.)

Време преврата и великих очекивања за коначан обрачун са филозофским проблемима прошло је у другој половини XX века. Утицај логике, која сада важи за веома успешну, се усталио. У њој су филозофи нашли поред средстава за описивање својих проблема и саме проблеме којима ће се бавити. Логичка семантика се сматра веома значајном, и неки пут се са екстензионалне тачке гледишта (в. одељак 2.3) објашњава значење и у природном језику. А има и другачијих филозофских теза о значењу, на које су утицала различита логичка истраживања – она која се нпр. тичу онога што смо наговестили на крају одељака 1.10 и 2.12, и друга којих се нисмо дотакли у овој књизи.

Филозофи су иначе на злом гласу због тога што се радо служе звучним а нејасним речима – кривотвореним техничким терминима. Има нажалост прилично много скорашњих филозофских радова који су оптерећени компликованом терминологијом логичке инспирације. Та нова схоластика је сасвим страна истинском духу савремене логике, која је учинила велики напор да дисциплинује језик.

Логика је у мањој мери утицала на филозофију на још један начин. Ради се о утицају који иде не преко језика, него преко логичких резултата. Међу таквим резултатима најпознатији су Геделови, а њихове филозофске последице, које нису у духу овог доба, споменули смо у претпоследњем пасусу прошлог одељка 2.14. У друго доба такав утицај логике могао би да буде већи.

ЗАДАЦИ

0.4. Формалне дедукције

1. Дајте примере формалних дедукција које се заснивају искључиво на значењу речи *и*, *или*, *ако*, *не*, *сви*, *неки* и *је*, узетих појединачно или у комбинацији једна са другом.

2. Да ли је дедукција где се из премисе „Мислим“ закључује „Дакле, постојим“ формална?

3. Да ли за произвољну реченицу могу да се нађу неке реченице, не нужно истините, тако да се из тих реченица као премиса може формалном дедукцијом да дође до наше реченице као закључка?

1.1. Искази

1. Да ли су следећи изрази искази: „Празан скуп“, „Нула је празан скуп“, „Број нула“, „Нула није број“, „Нула је једини број који помножен са самим собом даје себе“, „Нула је једини број који сабран са самим собом даје себе“, „Спознај самог себе“, „Знам да ништа не знам“, „Мислим, дакле постојим“, „Лутам“, „Слутим“, „Бдим“, „Него нека чудовишта, полипи, делфини“, „Нико и ништа“, „Да!“, „Не!“, „Насмешио се последњи пут“, „Тврд је орах воћка чудновата“, „На Дрини ћуприја“, „Почетак буне против дахија“, „Све ће то народ позлатити“, „У добри час хајдуци“, „Први пут с оцем на јутрење“, „Розенкранц и Гилденстерн су мртви“, „Чекајући Годоа“, „Ћелава певачица“, „Француски краљ је ћелав“, „Једно јаје буђ“, „$2 + 2 - 4$“, „Нећу више да слушам те глупости“, „Крајње је време да почнеш да учиш“?

2. Дајте примере истинитих исказа, лажних исказа и реченица које нису искази.

3. У неком тексту реците које су све реченице искази.

1.2. Везници

1. Да ли је „Марко плаче и плаче“ замена за „Марко плаче и Марко плаче“?

2. Да ли је у исказу „Потрошене су и последње залихе“ реч *и* везник?

1.3. Истиносна функционалност

1. Да ли су следећи унарни везници истиносно-функцијски: *нужно је да, могуће је да*, *доказиво је да*, *увек је било да*, *увек ће бити да*, *једном је било да*, *једном ће бити да*, *обавезно је да*, *забрањено је да*?

1.4. Конјункција и дисјункција

1. Која је истиносна вредност исказа „Пада киша или не пада киша“ кад *или* схватимо као неискључујућу дисјункцију? А кад *или* схватимо као искључујућу дисјункцију?

1.5. Импликација и еквиваленција

1. Да ли *p под условом да q* значи исто што и *ако p, онда q* или исто што и *ако q, онда p*?

2. Претпоставите да имате четири карте које су са једне стране обележене словима а са друге цифрама, и претпоставите да вам тврде следеће:

(*) Ако је са једне стране самогласник, онда је са друге стране паран број.

Онда вам покажу на столу те четири карте окренуте тако да се виде следећи симболи: A, B, 2 и 3. Колико карата и које карте треба окренути да би се проверила истинитост исказа (*)? Да ли је довољно окренути карте A и 2?

3. *Вангова тетка*. Претпоставите да знате да је Ванг родом из Шангаја и да је то све што знате у вези са њим. Затим треба да рангирате следећа три исказа по томе колико су вероватни:

(1) Ако Ванг има тетку која продаје кишобране у Сремским Карловцима, онда има и стрица у Толеду који држи кафану где радо свраћа надбискуп;

(2) Ванг нема тетку која продаје кишобране у Сремским Карловцима;

(3) Ванг нема тетку која продаје кишобране у Сремским Карловцима, али зато има школску другарицу која је касирка у самопослузи у Шангају.

При том рангирању треба да важи да у истинитим импликацијама консеквенс не може да буде мање вероватан од антецеденса. Реците које је рангирање најбоље и објасните зашто су погрешна друга рангирања.

4. Шта значе искази „Мишеви коло воде у случају да је мачка отишла и само у том случају“ и „Мачка је отишла у случају да мишеви коло воде и само у том случају“?

5. Да ли искази облика *p ако и само ако q* и *q ако и само ако p* могу да имају различиту истиносну вредност?

1.6. Други бинарни везници

1. Распоредити у два квадрата везнике добијене негирањем везника у теменима два квадрата на слици у овом одељку.

2. Првобитна два квадрата и негирањем добијена два нова квадрата повезати природно да дају слике две коцке у равни.

3. Повезати те две слике природно да бисмо добили слику једне хиперкоцке у равни. (Овај задатак је за математички спретнијег читаоца.)

1.7. Исказне формуле

1. Путујући светом десило се да су сви географи које смо срели, а срели смо их сву силу, били стидљиви. Одатле, без обзира што се нисмо упознали са свим географима, обичном индукцијом долазимо до закључка „Сви географи су стидљиви“. Да ли тај исти исказ може да буде закључак неке формалне дедукције? А неке дедукције уопште?

2. Да ли су следећи изрази исказне формуле: $((p \vee q))$, $()p \vee q()$, $(p) \vee (q)$, $(p) \vee (q))$, $p \vee q$, $p\ (\vee)\ q$, $((((p \vee q) \vee (p \vee q)) \vee ((p \vee q) \vee (p \vee q))) \vee (p \vee q))$?

3. Да ли у некој исказној формули може да буде више левих заграда од десних? А обрнуто, више десних од левих?

4. Да ли постоји исказна формула у којој се од симбола за везнике јавља само $\vee$ и у којој има више од 18 милијарди милијарди симбола?

5. Наћи исказну формулу коју има као инстанцу следећи исказ: „Лађа ће да исплови ако су се сви путници укрцали, а неће да исплови ако нису“.

1.8. Објект-језик и метајезик

1. Да ли објект-језик може да буде природни језик а метајезик формалан језик?

1.9. Дрво потформула

1. Дати неколико примера исказних формула и њихових дрвета потформула. Затим записати те исказне формуле као дрвета и наћи одговарајуће формуле у пољској нотацији. Почети нпр. од исказних формула $\perp$, $\neg p$, $((p \to \perp) \to p) \leftrightarrow p$ и $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$.

2. Ако у некој формули имамо n јављања бинарних везника, и никакве друге везнике, колико може да има чворова у дрвету потформула те формуле? Колико може да има листова у том дрвету?

3. Посматрајмо дрвета потформула исказних формула са само бинарним везницима. Како изгледају таква дрвета која имају 18 милијарди милијарди листова? Како изгледа најниже, а како највише такво дрво (где се висина мери најмањим бројем чворова преко којих се стиже од корена до листа)? (Овај задатак треба упоредити са задатком 4 за одељак 1.7.)

1.10. Семантика исказне логике

1. Да ли постоји валуација која сваком исказном слову приписује 1?

2. Да ли постоји валуација која свакој исказној формули приписује 1?

3. Да ли постоји исказна формула којој свака валуација приписује 1?

4. Проверити да се пресек, унија и комплемент у двочланој Буловој алгебри понашају као што кажу одговарајуће истиносне таблице. (Ако је 1 скуп $\{*\}$ имамо да је пресек $\{*\}$ са $\{*\}$ једнак $\{*\}$, да је пресек $\{*\}$ са празним скупом једнак празном скупу, итд.)

1.11. Таутологије

1. Да ли је нека исказна формула контрадикција ако и само ако је негација таутологије?

2. Да ли је нека исказна формула контрадикција ако и само ако је њена негација таутологија?

3. Да ли је нека исказна формула контрадикција ако и само ако није таутологија?

4. Да ли супституциона инстанца контрадикције може да буде таутологија?

5. Да ли свака исказна формула која није таутологија има неку супституциону инстанцу која је таутологија?

6. Да ли свака исказна формула која није контрадикција има неку супституциону инстанцу која је контрадикција?

7. Да ли свака исказна формула која није контрадикција има неку супституциону инстанцу која је таутологија?

8. Да ли свака исказна формула која није таутологија има неку супституциону инстанцу која је контрадикција?

1.12. Замена еквивалената

1. Да ли следеће еквиваленције могу да се добију заменом еквивалената: $((p \to p) \to p) \leftrightarrow p$, $((p \to q) \to p) \leftrightarrow p$, $p \leftrightarrow p$, $p \leftrightarrow \neg p$?

1.13. Чишћење

1. Нацртати дрвета добијена у примерима у овом одељку са два чишћења исказне формуле $((p \to q) \to p) \to p$.

2. Испитати чишћењем да ли су таутологије исказне формуле на списковима у одељцима 1.14, 1.15 и 1.17.

3. Испитати чишћењем да ли су формула $(p \to q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \leftrightarrow p)$ и формула $(q \to p) \leftrightarrow ((p \vee q) \leftrightarrow p)$ таутологије.

4. Испитати чишћењем да ли су $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$, $(p \to \neg q) \leftrightarrow (q \to \neg p)$, $(\neg p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to p)$ и $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ таутологије.

5. Да ли је истина да је неко филозоф и брбљив или пак математичар и расејан само ако је филозоф или математичар и осим тога брбљив или расејан. А да ли мора да буде истина, обрнуто, да ако је неко филозоф или математичар и осим тога брбљив или расејан, онда је он филозоф и брбљив или математичар и расејан?

1.14. Дуалност између конјункције и дисјункције

1. Шта се добија применом тврђења о дуалности конјункције и дисјункције на следеће таутологије: $(p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$, $(p \vee \neg p) \leftrightarrow \top$, $\bot \leftrightarrow \neg(p \vee \neg p)$?

2. Закључити из тврђења о дуалности између конјункције и дисјункције да за исказне формуле A, A', B и B' као у том тврђењу важи следеће: „Ако је $A \to B$ таутологија, онда је $B' \to A'$ таутологија“ (искористити задатак 3 за одељак 1.13). Илустровати ту последицу дуалности уз помоћ таутологија $p \to \top$ и $(p \wedge q) \to p$.

1.15. Везе између везника и функционална потпуност

1. Дефинисати импликацију, негацију, конјункцију и дисјункцију преко тернарног везника *ако* __, *онда* __; *иначе* __ и нуларних везника $\top$ и $\perp$.

2. Која је веза између таутологије $((p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r))$ и Де Моргановог закона $\neg (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$?

3. Да ли је $((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$ таутологија? Да ли је та формула у вези са неким Де Моргановим законом?

1.16. Дисјунктивна и конјунктивна нормална форма

1. За сваку исказну формулу на следећем списку наћи неку њену дисјунктивну и неку њену конјунктивну нормалну форму: $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$, $(p \vee q) \rightarrow r$, $\neg ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r))$, $p \leftrightarrow q$, $\neg (p \leftrightarrow q)$, $p \leftrightarrow p$, $\neg (p \leftrightarrow p)$.

2. Из таблице истиносно-функцијског везника можемо као у одељку 1.16 да добијемо једну формулу у дисјунктивној, или пак конјунктивној, нормалној форми. Шта може одатле да се закључи о функционалној потпуности из одељка 1.15?

1.18. Природна дедукција

1. Да ли су следеће формуле таутологије: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$, $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$, $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$?

2. Ком краћем исказу је еквивалентан исказ „Лађа ће да исплови ако су се сви путници укрцали, а неће да исплови ако нису“?

3. Да ли је следећа формула таутологија $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$?

4. Покушајте да на основу таутологија $p \rightarrow (p \vee q)$, $q \rightarrow (p \vee q)$ и $((p \vee q) \wedge ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r))) \rightarrow r$ формулишете правила природне дедукције за дисјункцију. (Трећа од тих таутологија, која је тесно повезана са таутологијама $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r))$ и $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$, је закон испитивања случајева: ако $p \vee q$ и r следи у оба случаја, и из p и из q, онда r.)

5. Општије правило јаког свођења на апсурд, споменуто у одељку 1.18, гласи:

> Са доказа за $\perp$ из хипотезе $\neg A$ и хипотеза у Γ, пређи на доказ за A из хипотеза у Γ,

где као гранични случај имамо:

> Са доказа за $\perp$ из хипотеза у Γ, пређи на доказ за A из хипотеза у Γ.

Помоћу тог правила, правила за увођење импликације (укључујући и гранични случај споменут у одељку 1.18) и правила за елиминисање импликације, тј. модус поненса, уз дефиниције конјункције и дисјункције, доказати да су све аксиоме из одељка 1.17 теореме, тј. имају доказ без хипотеза. (Одатле може да се закључи да је систем природне дедукције за исказну логику са само та три правила, и негацијом дефинисаном преко импликације и апсурда $\perp$, потпун; в. одељак 1.19.)

6. Заменити у претходном задатку правила за увођење и елиминисање импликације правилима за увођење и елиминисање конјункције, па, уз дефиниције импликације и дисјункције, доказати да су све аксиоме из одељка 1.17 теореме, а модус поненс изведено правило. (Уз мало дотеривања, то опет води једном потпуном систему природне дедукције за исказну логику.)

1.19. Потпуност исказне логике

1. Пробајте да опишете поступак за свођење на дисјунктивну и конјунктивну нормалну форму заснован на закону двоструке негације, Де Моргановим законима, дистрибутивности и другим еквиваленцијама из одељка 1.14.

2. Из потпуности може да се закључи да ако потпун систем за исказну логику проширимо са неком исказном формулом која није таутологија и свим њеним супституционим инстанцама, онда је у проширеном систему свака исказна формула теорема (в. задатак 8 за одељак 1.11).

2.1. Предикати

1. Колико има предиката и којих све арности у исказу „Марко више цени Јанка од Новака, али не и од Стојана“?

2.8. Ваљане формуле

1. Да ли су следеће формуле ваљане:

$\forall x(A \vee B) \rightarrow (\forall x\, A \vee \forall x\, B)$,
$(\exists x\, A \wedge \exists x\, B) \rightarrow \exists x(A \wedge B)$,
$(\forall x\, A \rightarrow \forall x\, B) \rightarrow \forall x(A \rightarrow B)$,
$(\exists x\, A \rightarrow \exists x\, B) \rightarrow \forall x(A \rightarrow B)$.

За оне формуле које то нису наћи контрамоделе који то показују.

2. Ако све има свој узрок, да ли постоји узрок свега? Ако свако воли неког, да ли постоји неко кога сви воле?

2.9. Ограничени квантификатори

1. Напишите инстанце дистрибутивности универзалног квантификатора над конјункцијом и импликацијом (те дистрибутивности су у списку ваљаних формула у одељку 2.8) које су уз таутологију $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ везане за ваљану формулу $(\forall x(A \rightarrow B) \wedge \forall x(B \rightarrow C)) \rightarrow \forall x(A \rightarrow C)$.

2. Извести еквиваленцију $\neg(\exists xRt)\, A \leftrightarrow (\forall xRt) \neg A$ из еквиваленције $\neg(\forall xRt)\, B \leftrightarrow (\exists xRt) \neg B$.

2.10. Једнакост

1. Која је највећа релација еквиваленције на неком скупу, она од које су све друге подскупови?

2. Шта значи $\exists y \exists u(((A^x{}_y \wedge A^x{}_u) \wedge \neg\, y = u) \wedge \forall z(A^x{}_z \rightarrow (z = y \vee z = u))$?

3. Да ли неком формулом може да се запише да постоје тачно три објекта која певају?

2.11. Формални системи за предикатску логику

1. Проверити да аксиоме облика $A^x{}_w \leftrightarrow (\forall x = w)\, A$ или облика $A^x{}_w \leftrightarrow (\exists x = w)\, A$ за терм w који није x, тј. у којем се x не јавља, могу да замене аксиоме једнакости на почетку одељка. (Ово није сасвим једноставан задатак.)

2.14. Теорија скупова

1. *Парадокс*. Софиста Протагора је са једним својим ђаком кога је спремао за адвоката направио уговор да ће му овај платити за школовање тек када добије прву парницу. Школовање се завршило, време пролази, а бивши ђак никако да учествује у некој парници. На крају се Протагора реши да га тужи и тражи наплату преко суда. Шта може да очекује Протагора? Шта може да очекује ђак?

2. *Опет парадокс*. Претпоставите да имамо бесконачно много људи, који се зову 0, 1, 2, 3, ..., и претпоставите да за свако n човек n каже: „За свако $m > n$, то што m каже није истина”. Да ли је то што каже било ко од њих истина или не?

ЛИТЕРАТУРА ЗА ДАЉЕ УЧЕЊЕ

Одличан уџбеник за факултетски први курс из логике је:

S.C. Kleene, *Mathematical Logic*, Wiley, New York, 1967 (reprint, Dover, New York, 2002); руски превод: С.К. Клини, *Математическая логика*, Мир, Москва, 1973.

Одличан уџбеник за факултетски други курс из логике је:

G.S. Boolos, J.P. Burgess and R.C. Jeffrey, *Computability and Logic*, fifth edition, Cambridge University Press, 2007; руски превод трећег издања: Дж. Булос и Р. Джеффри, *Вычислимость и логика*, Мир, Москва, 1994.

Уџбеник на српском у складу са курсом из логике на првој години студија филозофије на Филозофском факултету Универзитета у Београду је:

М. Борисављевић, *Увод у логику, први део*, Саобраћајни факултет, Београд, 2009, *други део*, 2016.

Уџбеник на српском за уводни курс из логике намењен студентима математике је:

Ж. Ковијанић Вукићевић и С. Вујошевић, *Увод у логику*, Универзитет Црне Горе, Подгорица, 2009.

Књига на српском која даје увод у разне велике логичке проблеме је:

Ж. Мијајловић, З. Марковић и К. Дошен, *Хилбертови проблеми и логика*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1986.

На Интернету осим књига као што су ове и многе друге у слободним електронским издањима (elibrary.matf.bg.ac.rs, www.mi.sanu.ac.rs/~kosta/publications.htm) може да се нађе пуно тога о логици, пре свега на енглеском, у Википедији, највећој енциклопедији. (Чланци у Википедији нису међутим увек савршено поуздани; поузданији су када се тичу математике него када се тичу филозофије.) За питања о логици у вези са филозофијом на Интернету је исто Стенфордска филозофска енциклопедија (Stanford Encyclopedia of Philosophy), којој је приступ слободан.

ИНДЕКС